MATH.SE

SVERIGES UNIVERSITETS MATEMATIKPORTAL

Online Mathematik Brückenkurs 2

Online Mathematik Brückenkurs 2

Inhaltsverzeichnis

För fullständiga lösningar, senaste versionen av materialet, externa länkar, mm., se studiematerialet på Internet `www.math.se/wiki`

Willkommen zum Kurs

Es gibt nun einen einfachen Weg, besser auf Dein Universitätsstudium vorbereitet zu sein.

Dieser Kurs ist für alle jene StudentInnen gedacht, deren Universitätsstudium das Fach Mathematik einschliesst, und die gut vorbereitet sein möchten vor dem Beginn des Studiums.

Der Kurs soll ein überbrückender Kurs zwischen Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen und der Universität sein. Wir empfehlen Dir den Kurs auch wenn Du in der Oberstufe gute Ergebnisse in Mathematik hattest. Der Kurs kann komplett online durchgeführt werden.

Der Kurs ist eine Zusammenarbeit zwischen dem Imperial College und dem Zentrum MATH.SE.

Du erstellst selber den Zeitplan Dein Studium und kannst diesen leicht an Deine Pläne anpassen.

Einschreibung und Zugang zu den Foren, Hotline, Prüfung und ein persönlicher Tutor

Die Kursunterlagen sind über das Internet offen und zugänglich. Du kannst dich jederzeit während des Jahres mittels eines elektronischen Formulares bei `http://www3.math.tu-berlin.de/OMB/login.html` für den Kurs einschreiben. Du erhälst einen Benutzernamen und ein Passwort, die Dir den Zugang zu allen Lehrmitteln des Kurses, zu Diskussionsforums, zur Hotline, „monitoring“ und zu Prüfungen ermöglichen. Du erhälst außerdem einen persönlichen Tutor zugeteilt, der Dir bei der erfolgreichen Durchführung des Kurses behilflich ist.

Supervision und Prüfung

Du kannst jederzeit an Diskussionen online mit StudienkollegInnen teilnehmen, Fragen stellen und Hilfeleistung von Lehrern erhalten. Prüfungen erfolgen online im Laufe des Kurses.

Bitte beachte, dass die Verwendung von Taschenrechnern während des Kurses nicht vorgesehen ist.

Die Verwendung von Taschenrechnern in Mathematik auf der Universität ist von Fach zu Fach verschieden. Auf manchen Instituten sind Taschenrechner überhaupt nicht zugelassen, während auf anderen Instituten Taschenrechner

manchmal verwendet werden dürfen. Für die meisten Aufgaben ist jedenfalls die Verwendung eines Taschenrechners nicht von Vorteil.

Wie Du mit dem Kurs am besten lernst:

1. Lies zuerst den Theorieabschnitt und die Beispiele durch.
2. Löse danach die Übungen ohne Taschenrechner. Kontrolliere Deine Antworten indem Du auf „Antwort“ klickst. Falls Du Hilfe brauchst, kannst Du auf „Lösung“ klicken, um diese mit Deiner Lösung zu vergleichen.
3. Wenn Du mit den Übungen fertig sind, kannst Du die diagnostische Prüfung für das aktuelle Kapitel machen.
4. Falls Du irgendwelche Schwierigkeiten hast, kannst Du im Forum nach ähnlichen Beiträgen suchen. Wenn Du keinen hilfreichen Beitrag findest, kannst Du selbst eine Frage im Forum stellen, die einE MentorIn (oder andereR StudentIn) innerhalb von ein paar Stunden beantworten wird.
5. Wenn Du die diagnostische Prüfung bestanden hast, solltest Du die Schlussprüfung machen. Um die Schlussprüfung zu bestehen, müssen drei aufeinander folgende Fragen richtig beantwortet werden.
6. Wenn Du die diagnostische Prüfung und die Schlussprüfung geschafft hast, hast Du das Kapitel bestanden, und kannst mit dem nächsten Kapitel beginnen.

P.S. Falls Du mit dem Inhalt eines Kapitels schon gut vertraut bist, kannst Du direkt die Prüfungen machen. Du musst auch dann alle Fragen richtig beantworten, aber Du hast auch mehrere Versuche um die Prüfungen zu bestehen.

Information über den Kurs

Aktuelles Wissen verbessert Deine Erfolgschancen im Studium

Dies ist ein überbrückender Kurs zwischen allgemeinbildenden Höheren Schulen (Oberstufe) und der Universität. Er umfasst Kenntnisse und Fähigkeiten, die unserer Meinung nach grundlegend wichtig sind, weshalb sie vor Deinem Universitätsstudium aufgefrischt werden sollten. Der Kurs ist flexibel. Du studierst in dem Takt, der für Dich passt.

Folgende Arbeitsweise ist vorgesehen:

- Beginne jeden Abschnitt damit, die Übersicht zu lesen und dann die Beispiele zu studieren.
- Arbeite die Beispiele durch und beantworte dann die Fragen der diagnostischen Prüfung des jeweiligen Abschnittes. Wenn Du nicht weiter kommst, schaue nach, ob jemand eine Frage über diesen bestimmten Kursabschnitt im Forum gestellt hat oder stelle selbst eine Frage.
- Wenn Du mit den Übungen und der diagnostischen Prüfung eines Abschnitt fertig sind, mache die Schlussprüfung des Abschnittes.

Unsere TutorInnen unterstützen Dich

Wenn Du Dich mit Deinem Benutzernamen einloggst, kommst Du zur Student Lounge. Hier findest Du die Emailadresse und die Telefonnummer, unter der Du die TutorInnen des Bruckenkurses kontaktieren kannst. Melde Dich, wenn Du bei einer Frage stecken bleibst oder wann auch immer Du Hilfe brauchst.

Die TutorInnen sind StudentenInnen, die in ihrem Studium das erste Semester schon erfolgreich geschafft haben. Sie sind voll darauf eingestellt, Dir zu helfen. Unser gemeinsames Ziel ist es, dass jeder, der den Kurs begonnen hat, es schafft, diesen zu beenden und somit eine gute Basis für das zukünftige Universitätsstudium hat.

Information über Prüfungen

Damit Du Dich selbst testen kannst und merkst ob Du alles verstanden hast, gibt es Prüfungen. Sie werden nicht benotet und es ist nicht schlimm, wenn Du eine Prüfung nicht beim ersten Mal bestehst!

Am Ende jedes Abschnittes gibt es eine diagnostische Prüfung und eine Schlussprüfung.

Diagnostische Prüfung und Schlussprüfung erfolgen online

Die Links zu den diagnostischen Prüfungen und den Schlussprüfungen findest Du in der Student Lounge, zu der Du gelangst, wenn Du mit Deinem persönlichen Benutzernamen eingeloggt bist. Wenn Du die diagnostische Prüfung beim ersten Anlauf nicht schaffst, wiederhole diese solange bis Du alle Fragen richtig beantworten kannst.

Die Schlussprüfungen bestehen aus drei auf dem Computer angezeigten, mittels Zufallsgenerator ausgewählten Fragen. Diese Fragen sind auf einem Blatt zu lösen und die Antworten einzugeben. Du musst alle drei Fragen während einer Sitzung richtig beantworten, um durchzukommen.

Ist die Antwort auf eine Antwort falsch, kannst Du einen neuen Versuch starten. Du wirst nun drei neue Fragen erhalten. Auch wenn Du eine oder zwei Fragen der vorhergehenden Reihe richtig beantwortet hast, beginnst Du wieder von vorne und musst alle drei Fragen richtig beantworten.

In diesem Kurs gibt es keine Hausaufgabe und keine Gruppenaufgabe.

1.1 Einführung zur Differentialrechnung

Inhalt:

- Die Definition der Ableitung.
- Die Ableitungen von x^α, $\ln x$, e^x, $\cos x$, $\sin x$ und $\tan x$.
- Die Ableitungen von Summen und Differenzen.
- Tangenten und Normalen.

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes wissen:

- Die Ableitung $f'(a)$ der Funktion f ist die Steigung des Graphen von f an der Stelle $x = a$.
- Die Ableitung beschreibt eine momentane Veränderung einer Funktion.
- Die Ableitung ist nicht immer definiert (wie bei der Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$).
- Wie man x^α, $\ln x$, e^x, $\cos x$, $\sin x$ und $\tan x$ sowie Summen und Differenzen davon ableitet.
- Wie man die Tangente und die Normale einer Funktion bestimmt.
- Die Ableitung von f an der Stelle x_0 wird mit $f'(x_0)$ oder $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet.

A - Einführung

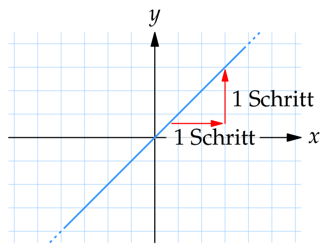
Bei der Analyse von Funktionen und deren Graphen will man meist wissen, wie sich eine Funktion verändert, z.B. ob sie steigend oder fallend ist und wie steil sie ist.

Daher führt man den Begriff Sekantensteigung ein. Die Sekantensteigung ist ein Maß wie steil eine Funktion ist. Kennt man zwei Punkte des Graphen, kann man die Sekantensteigung $\Delta y/\Delta x$ berechnen

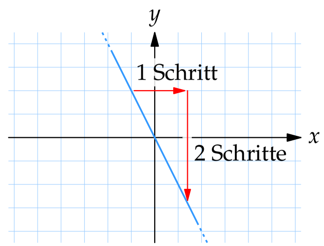
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Unterschied in } y}{\text{Unterschied in } x}.$$

Beispiel 1

Die linearen Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = -2x$ haben überall dieselbe Sekantensteigung, nämlich 1 und -2.



Graph von $f(x) = x$ hat die Steigung 1



Graph von $g(x) = -2x$ hat die Steigung -2

Für eine lineare Funktion ist die Sekantensteigung dasselbe wie die Steigung.

Falls ein Auto mit konstanter Geschwindigkeit von 80 km/h unterwegs ist, hat es nach t Stunden $s = 80t$ km zurückgelegt. Wir schreiben die Strecke s in Abhängigkeit von der Zeit t als $s(t)$, also $s(t) = 80t$. Die Steigung der Funktion s ist genau dasselbe wie die Geschwindigkeit des Autos. Falls das Auto nicht mit konstanter Geschwindigkeit fährt, variiert auch die Steigung der Funktion s. Man kann natürlich immer noch die Sekantensteigung berechnen und dies wird einer Durchschnittsgeschwindigkeit entsprechen. In diesem Abschnitt werden wir uns aber darauf konzentrieren, die momentane Steigung von s (also Momentangeschwindigkeit des Autos) zu berechnen.

Beispiel 2

Für die Funktion $f(x) = 4x - x^2$ gilt, dass $f(1) = 3$, $f(2) = 4$ und $f(4) = 0$. Also sind $(1,3)$, $(2,4)$ und $(4,0)$ Punkte des Graphen von f.

a) Die Steigung der Sekante durch die Punkte $(1,3)$ und $(2,4)$ ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{4-3}{1} = 1,$$

und die Funktion nimmt in diesem Intervall zu.

b) Die Sekantensteigung von $x = 2$ bis $x = 4$ ist

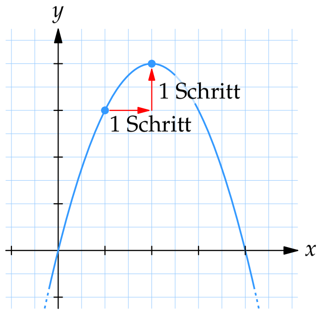
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4-2} = \frac{0-4}{2} = -2,$$

und die Funktion nimmt in diesem Intervall ab.

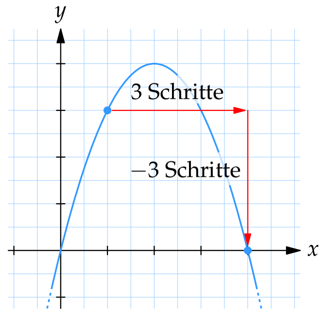
c) Zwischen $x = 1$ und $x = 4$ ist die Sekantensteigung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{0 - 3}{3} = -1.$$

Im ganzen Intervall nimmt die Funktion ab, obwohl sie im Intervall abnimmt und zunimmt.



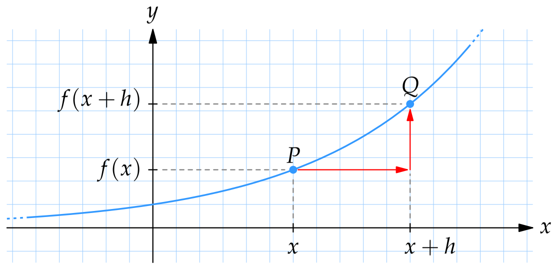
Zwischen $x = 1$ und $x = 2$ hat die Funktion die Sekantsteigung $1/1 = 1$



Zwischen $x = 1$ und $x = 4$ hat die Funktion die Sekantsteigung $(-3)/3 = -1$

B - Definition der Ableitung

Um die momentane Steigung in einen Punkt $P = (x, f(x))$ zu berechnen, führen wir einen anderen Punkt Q ein und berechnen die Sekantensteigung zwischen P und Q:



Sekantensteigung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Wenn wir den Punkt Q immer näher dem Punkt P wählen, erhalten wir zum Schluss die momentane Steigung im Punkt P. Dies nennt man die Ableitung von f im Punkt P oder (weil $P = (x, f(x))$) an der Stelle x.

Die Ableitung von f an der Stelle x schreibt man als $f'(x)$. Sie ist definiert als:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Wenn für ein x_0 der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert, sagt man, dass die Funktion f an der Stelle $x = x_0$ *differenzierbar* ist.

Die Definition der Differenzierbarkeit benutzt den „Grenzwert für h nach Null“, den man als $\lim_{h \to 0}$ schreibt. Man sagt auch „der Limes (= lateinisch für Grenzwert) von h gegen Null“. Ganz grob bedeutet das, dass h immer kleiner wird oder immer näher an die Null heranrückt. Der Grenzwert wird in der Analysis I mathematisch exakt eingeführt und ist dann ein sehr wichtiges Thema.

Es gibt viele Bezeichnungen für die Ableitung, hier sind einige.

Funktion	Ableitung
$f(x)$	$f'(x)$
y	y'
y	Dy
y	$\frac{dy}{dx}$
$s(t)$	$\dot{s}(t)$

C - Das Vorzeichen der Ableitung

Das Vorzeichen $(+/-)$ sagt uns, ob die Funktion fallend oder steigend ist:

- $f'(x) > 0$ (positive Ableitung) bedeutet, dass $f(x)$ steigend ist.
- $f'(x) < 0$ (negative Ableitung) bedeutet, dass $f(x)$ fallend ist.
- $f'(x) = 0$ (Ableitung ist null) bedeutet, dass $f(x)$ waagerecht ist.

Beispiel 3

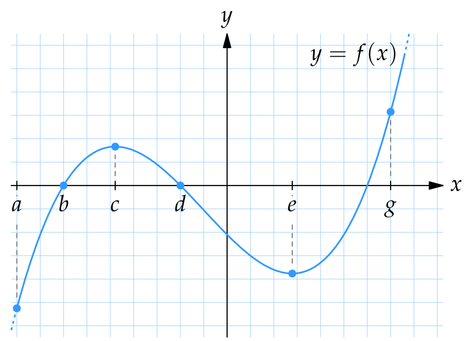
a) $f(2) = 3$ bedeutet, dass in $x = 2$ **der Wert der Funktion** 3 ist.

b) $f'(2) = 3$ bedeutet, dass in $x = 2$ **die Steigung der Funktion** 3 ist.

Beispiel 4

Aus der Abbildung sehen wir, dass

$f'(a) > 0$
$f(b) = 0$
$f'(c) = 0$
$f(d) = 0$
$f'(e) = 0$
$f(e) < 0$
$f'(g) > 0$



Beachte den Unterschied zwischen $f(x)$ und $f'(x)$.

Beispiel 5

Die Temperatur $T(t)$ in einer Thermoskanne nach t Minuten ist gegeben. Wir erklären $T(t)$ und $T'(t)$ umgangssprachlich.

a) $T(0) = 85$

Zu Beginn ist die Temperatur 85°.

b) $T(10) = 80$

Nach 10 Minuten ist die Temperatur 80°.

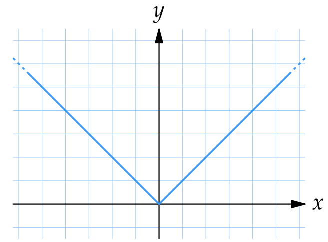
c) $T'(2) = -0{,}3$

Zum Zeitpunkt $t = 2$ nimmt die Temperatur 0,3° pro Minute ab. (Die Ableitung ist negativ und deshalb nimmt die Temperatur ab.)

Beispiel 6

Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar, da rechts von 0 die Steigung der Tangente 1 beträgt während links von 0 die Steigung der Tangente -1 beträgt . Man kann also die Steigung der Funktion im Punkt $(0,0)$ nicht bestimmen (Siehe Abbildung).

Man kann auch sagen, dass $f'(0)$ nicht existiert oder nicht definiert ist.



Graph der Funktion $f(x) = |x|$

D - Ableitungen von Funktionen

Mittels der Definition der Ableitung einer Funktion kann man die Ableitungen von im Prinzip allen Funktionen berechnen.

Beispiel 7

Wenn $f(x) = x^2$ ist, ist laut der Definition der Ableitung

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h.$$

Lassen wir h sich Null nähern, erhalten wir $2x$. Also ist die Steigung der Funktion $y = x^2$, $2x$ an der Stelle x. Also ist die Ableitung von x^2, $2x$.

Auf ähnliche Weise kann man mehr allgemeine Formeln für die Ableitung von Funktionen zeigen:

Funktion	Ableitung
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$

Außerdem besitzt die Ableitung einige wichtige Eigenschaften;

$$\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x).$$

Und, wenn k eine Konstante ist, ist

$$\big(k\cdot f(x)\big)' = k\,f'(x).$$

Beispiel 8

a) $D(2x^3-4x+10-\sin x) = 2\,Dx^3 - 4\,Dx + D10 - D\sin x$
$= 2\cdot 3x^2 - 4\cdot 1 + 0 - \cos x.$

b) $y = 3\ln x + 2e^x$ ergibt $y' = 3\cdot\frac{1}{x} + 2e^x = \frac{3}{x} + 2e^x\,.$

c) $\frac{d}{dx}\Big(\frac{3x^2}{5} - \frac{x^3}{2}\Big) = \frac{d}{dx}\big(\tfrac{3}{5}x^2 - \tfrac{1}{2}x^3\big) = \tfrac{3}{5}\cdot 2x - \tfrac{1}{2}\cdot 3x^2 = \tfrac{6}{5}x - \tfrac{3}{2}x^2\,.$

d) $s(t) = v_0t + \frac{at^2}{2}$ ergibt $s'(t) = v_0 + \frac{2at}{2} = v_0 + at\,.$

Beispiel 9

a) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ergibt $f'(x) = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\,.$

b) $f(x) = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}\,x^{-2}$ ergibt $f'(x) = \frac{1}{3}\cdot(-2)x^{-3} = -\frac{2}{3}\cdot x^{-3} = -\frac{2}{3x^3}\,.$

c) $g(t) = \frac{t^2-2t+1}{t} = t - 2 + \frac{1}{t}$ ergibt $g'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}\,.$

d) $y = \Big(x^2+\frac{1}{x}\Big)^2 = (x^2)^2 + 2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x} + \Big(\frac{1}{x}\Big)^2 = x^4 + 2x + x^{-2}$
ergibt $y' = 4x^3 + 2 - 2x^{-3} = 4x^3 + 2 - \frac{2}{x^3}\,.$

Beispiel 10

Die Funktion $f(x) = x^2 + x^{-2}$ hat die Ableitung

$$f'(x) = 2x^1 - 2x^{-3} = 2x - \frac{2}{x^3}.$$

Also ist zum Beispiel $f'(2) = 2\cdot 2 - 2/2^3 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ und $f'(-1) = 2\cdot(-1) - 2/(-1)^3 = -2+2 = 0$. Die Ableitung $f'(0)$ ist aber nicht definiert.

Beispiel 11

Ein Gegenstand bewegt sich so wie $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$, wo $s(t)$ km die Strecke des Gegenstandes nach t Stunden ist. Berechnen Sie $s'(3)$ und erklären Sie die Bedeutung dieses Ausdruckes.

Wir berechnen die Ableitung der Funktion $s(t)$,

$$s'(t) = 3t^2 - 8t + 5 \qquad \text{ergibt} \qquad s'(3) = 3\cdot 3^2 - 8\cdot 3 + 5 = 8.$$

Also hat der Gegenstand die Geschwindigkeit 8 km/h nach 3 Stunden.

Beispiel 12

Die Gesamtkosten T in Euro für die Herstellung von x Gegenständen sind

$$T(x) = 40000 + 370x - 0{,}09x^2 \quad \text{für } 0 \le x \le 200.$$

Berechne und erkläre folgende Ausdrücke

a) $T(120)$

$T(120) = 40000 + 370\cdot 120 - 0{,}09\cdot 120^2 = 83104$. Die Gesamtkosten für die Herstellung von 120 Gegenständen sind 83.104 Euro.

b) $T'(120)$

Die Ableitung ist $T'(x) = 370 - 0{,}18x$ und daher ist

$$T'(120) = 370 - 0{,}18\cdot 120 \approx 348.$$

Die Marginalkosten (die Kosten für die Produktion einer extra Einheit) von 120 produzierten Gegenständen sind ungefähr 348 Euro.

E - Tangenten und Normalen

Eine *Tangente* ist eine Gerade, die tangential zum Graphen ist.

Eine *Normale* ist die Gerade, die orthogonal zur Tangente ist: Die Tangente und die Normale bilden einen rechten Winkel.

Für rechtwinklige Geraden ist das Produkt ihrer Steigungen immer -1. Wenn also die Steigung der Tangente k_T ist, und die Steigung der Normalen k_N ist, ist $k_T\, k_N = -1$. Damit kann man die Geradengleichung der Normalen aufstellen.

Beispiel 13

Bestimme die Tangente der Funktion $y = x^2 + 1$ im Punkt $(1, 2)$.

Wir schreiben die Gleichung der Tangente $y = kx + m$. Nachdem die Gerade die Kurve bei $x = 1$ berührt, ist $k = y'(1)$, also

$$y' = 2x, \qquad y'(1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Nachdem die Tangente durch den Punkt $(1, 2)$ geht, haben wir

$$2 = 2 \cdot 1 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = 0.$$

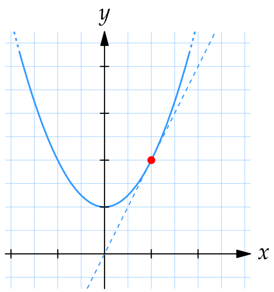
Die Tangente ist also $y = 2x$.

Die Steigung der Normalen ist $k_N = -1/k_T = -\frac{1}{2}$.

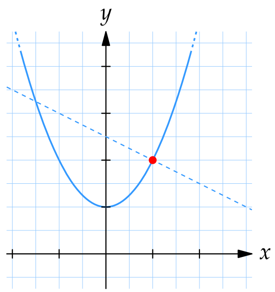
Zusätzlich geht die Normale durch den Punkt $(1, 2)$, und daher ist

$$2 = -\tfrac{1}{2} \cdot 1 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = \tfrac{5}{2}.$$

Die Normale ist also $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{5-x}{2}$.



Tangente $y = 2x$



Normale $y = (5-x)/2$

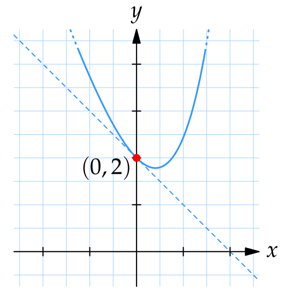
Beispiel 14

Die Kurve $y = 2e^x - 3x$ hat eine Tangente mit der Steigung -1. Bestimme die Stelle, wo die Kurve die Tangente berührt.

Die Ableitung ist $y' = 2e^x - 3$ und an der gesuchten Stelle muss die Ableitung -1 sein, also $y' = -1$. Wir erhalten dadurch

$$2e^x - 3 = -1$$

mit der Lösung $x = 0$. An der Stelle $x = 0$ hat die Kurve den y-Wert $y(0) = 2e^0 - 3 \cdot 0 = 2$, und daher ist der tangentiale Punkt $(0, 2)$.



Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

1.1 Übungen

Übung 1.1:1

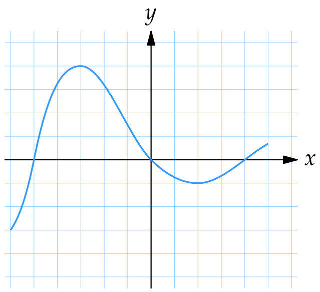
Der Graph von $f(x)$ ist nebenstehend abgebildet.

a) Welche Vorzeichen haben $f'(-5)$ und $f'(1)$?

b) Für welche x ist $f'(x) = 0$?

c) In welchem Intervall bzw. in welchen Intervallen ist $f'(x)$ negativ?

(Jedes Kästchen entspricht der Länge 1.)



Übung 1.1:2

Bestimme die Ableitung $f'(x)$ für

a)	$f(x) = x^2 - 3x + 1$	b)	$f(x) = \cos x - \sin x$	c)	$f(x) = e^x - \ln x$
d)	$f(x) = \sqrt{x}$	e)	$f(x) = (x^2-1)^2$	f)	$f(x) = \cos(x + \pi/3)$

Übung 1.1:3

Ein Ball wird aus der Höhe $h = 10$ m zur Zeit $t = 0$ fallengelassen. Die Höhe des Balles zur Zeit t ist $h(t) = 10 - 9{,}82t^2/2$. Welche Geschwindigkeit hat der Ball, wenn er auf den Boden fällt?

Übung 1.1:4

Bestimme die Tangente und die Normale zur Kurve $y = x^2$ im Punkt $(1, 1)$.

Übung 1.1:5

Bestimme alle Punkte auf der Kurve $y = -x^2$, die eine Tangente haben, die durch den Punkt $(1, 1)$ geht.

1.2 Ableitungsregeln

Inhalt:

- Die Ableitung eines Produktes und eines Bruches von Funktionen
- Die Ableitung verketteter Funktionen
- Höhere Ableitungen

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes wissen:

- Wie man prinzipiell jede Funktion, die aus Elementarfunktionen besteht, ableitet.

A - Die Produkt- und Quotientenregel

Mittels der Definition der Ableitung können wir Ableitungsregeln für Produkte und Quotienten von Funktionen herleiten:

Produkt- und Quotientenregel:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

Dieselbe Regel in einer anderen Notation:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\,g(x)\big) = \Big(\frac{d}{dx}f(x)\Big)\,g(x) + f(x)\,\Big(\frac{d}{dx}g(x)\Big)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\Big(\frac{d}{dx}f(x)\Big)\,g(x) - f(x)\,\Big(\frac{d}{dx}g(x)\Big)}{\big(g(x)\big)^2}$$

Beispiel 1

a) $\dfrac{d}{dx}(x^2 e^x) = 2x\,e^x + x^2\,e^x = (2x + x^2)\,e^x$

b) $(x \sin x)' = (x)' \cdot \sin x + x\,(\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$

c) $\dfrac{d}{dx}(x \ln x - x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

d) $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,\cos x - \sin x\,(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

e) $$\frac{d}{dx}\frac{1+x}{\sqrt{x}} = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - (1+x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

f) $$\frac{d}{dx}\frac{x\,e^x}{1+x} = \frac{(1 \cdot e^x + x\,e^x)(1+x) - x\,e^x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{e^x + x\,e^x + x\,e^x + x^2\,e^x - x\,e^x}{(1+x)^2} = \frac{(1 + x + x^2)\,e^x}{(1+x)^2}$$

B - Ableitung von verketteten Funktionen

Die Funktion $y(x) = f(g(x))$ besteht aus einer inneren Funktion g und einer äußeren Funktion f. Um $y(x)$ an einer Stelle $x = x_0$ zu berechnen, berechnet man zuerst $g(x_0)$ und berechnet dann $f(u_0)$ mit $u_0 = g(x_0)$. Eine solche Funktion y heisst auch verkettete Funktion und man schreibt $y = f \circ g$ und spricht „f kringel g" oder „f nach g".

Um eine verkettete Funktion abzuleiten, verwendet man die Kettenregel,

$$y'(x) = f'(g(x))\,g'(x).$$

Genau wie man sagt, dass die verkettete Funktion y aus einer äußeren Funktion f und einer inneren Funktion g besteht, sagt man auch, dass die Ableitung y' das Produkt der äußere Ableitung f' und der inneren Ableitung g' ist.

In einer anderen Notation lautet die Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{du}f(u)\Big|_{u=g(x)}\frac{d}{dx}g(x)\,.$$

Nennen wir $y = f(u)$ und $u = g(x)$, verkürzt sich die Kettenregel zu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Beispiel 2

$y(x) = (x^2 + 2x)^4$ ist eine verkettete Funktion. Wir benutzen die verkürzte Kettenregel:

$y = u^4$ die äußere Funktion und $u = x^2 + 2x$ die innere Funktion.

$\dfrac{dy}{du} = 4u^3$ die äußere Ableitung und $\dfrac{du}{dx} = 2x + 2$ die innere Ableitung.

Die Ableitung der Funktion y in Bezug auf x ist durch die Kettenregel gegeben,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot (2x+2) = 4(x^2+2x)^3 \cdot (2x+2).$$

Wenn man mit verketteten Funktionen rechnet, benennt man die äußere und innere Ableitung meist nicht mit neuen Funktionen, sondern man sagt einfach

(Äußere Ableitung) · (Innere Ableitung).

Vergiss nicht, die Produkt-und Quotientenregeln falls notwendig anzuwenden.

Beispiel 3

a) $f(x) = \sin(3x^2 + 1)$

Äußere Funktion: $f(u) = \sin u$, Äußere Ableitung: $f'(u) = \cos u$.

Innere Funktion: $g(x) = 3x^2 + 1$, Innere Ableitung: $g'(x) = 6x$.

$y(x) = f(g(x))$

$y'(x) = f'(g(x))\,g'(x) = \cos(3x^2+1) \cdot 6x = 6x \cos(3x^2+1)$

b) $y = 5\,e^{x^2}$

Äußere Ableitung: $5\,e^{x^2}$

Innere Ableitung: $2x$

$y' = 5\,e^{x^2} \cdot 2x = 10x\,e^{x^2}$

c) $f(x) = e^{x \sin x}$

Äußere Ableitung: $e^{x \sin x}$

Innere Ableitung: $1 \cdot \sin x + x \cos x$

$f'(x) = e^{x \sin x}(\sin x + x \cos x)$

d) $s(t) = t^2 \cos(\ln t)$

$$s'(t) = 2t \cdot \cos(\ln t) + t^2 \cdot \left(-\sin(\ln t) \cdot \frac{1}{t}\right) = 2t \cos(\ln t) - t \sin(\ln t)$$

e) $\frac{d}{dx}\, a^x = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln a}\right)^x = \frac{d}{dx}\, e^{x \ln a} = e^{x \ln a}\ \ln a = a^x\ \ln a$

f) $\frac{d}{dx}\, x^a = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln x}\right)^a = \frac{d}{dx}\, e^{a \ln x} = e^{a \ln x} \cdot a\,\frac{1}{x} = x^a \cdot a\, x^{-1} = a x^{a-1}$

Die Kettenregel kann mehrmals angewendet werden, um mehrfach verkettete Funktionen abzuleiten. Zum Beispiel hat die Funktion $y(x) = f\big(g(h(x))\big)$ die Ableitung

$$y'(x) = f'\big(g(h(x))\big) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Beispiel 4

a)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin^3 2x &= \frac{d}{dx}(\sin 2x)^3 = 3(\sin 2x)^2 \cdot \frac{d}{dx}\sin 2x \\ &= 3(\sin 2x)^2 \cdot \cos 2x \cdot \frac{d}{dx}(2x) = 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 \\ &= 6 \sin^2 2x\, \cos 2x\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\left(\sin\big((x^2-3x)^4\big)\right)' &= \cos\big((x^2-3x)^4\big)\,\big((x^2-3x)^4\big)' \\ &= \cos\big((x^2-3x)^4\big)\, 4(x^2-3x)^3\,(x^2-3x)' \\ &= \cos\big((x^2-3x)^4\big)\, 4(x^2-3x)^3\,(2x-3)\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin^4(x^2-3x) &= \frac{d}{dx}\left(\sin(x^2-3x)\right)^4 \\ &= 4\sin^3(x^2-3x)\,\frac{d}{dx}\sin(x^2-3x) \\ &= 4\sin^3(x^2-3x)\,\cos(x^2-3x)\,\frac{d}{dx}(x^2-3x) \\ &= 4\sin^3(x^2-3x)\,\cos(x^2-3x)\,(2x-3)\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x^3-1}}\right) &= e^{\sqrt{x^3-1}}\,\frac{d}{dx}\sqrt{x^3-1} = e^{\sqrt{x^3-1}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^3-1}}\,\frac{d}{dx}(x^3-1) \\ &= e^{\sqrt{x^3-1}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^3-1}}\,3x^2 = \frac{3x^2 e^{\sqrt{x^3-1}}}{2\sqrt{x^3-1}}\end{aligned}$$

C - Höhere Ableitungen

Falls eine Funktion mehrmals differenzierbar ist, kann man auch höhere Ableitungen berechnen, indem man die Funktion mehrmals ableitet.

Die zweite Ableitung schreibt man meistens f'', während man die dritte Ableitung als $f^{(3)}$ schreibt, die vierte als $f^{(4)}$ etc.

Mann kann auch $D^2 f$, $D^3 f$ oder $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ schreiben.

Beispiel 5

a) $f(x) = 3\, e^{x^2-1}$

$$f'(x) = 3\, e^{x^2-1} \cdot \frac{d}{dx}(x^2-1) = 3\, e^{x^2-1} \cdot 2x = 6x\, e^{x^2-1}$$
$$f''(x) = 6\, e^{x^2-1} + 6x\, e^{x^2-1} \cdot 2x = 6\, e^{x^2-1}\,(1+2x^2)$$

b) $y = \sin x\, \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x\, \cos x + \sin x\,(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\cos x\,(-\sin x) - 2\sin x \cos x = -4 \sin x \cos x$$

c)
$$\begin{aligned}D\,(e^x \sin x) &= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) \\ D^2(e^x \sin x) &= D\,\big(e^x(\sin x + \cos x)\big) \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2\,e^x \cos x \\ D^3(e^x \sin x) &= D\,(2\,e^x \cos x) \\ &= 2\,e^x \cos x + 2\,e^x(-\sin x) = 2\,e^x(\cos x - \sin x)\end{aligned}$$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

1.2 Übungen

Übung 1.2:1

Berechne die Ableitung von folgenden Funktionen und vereinfache sie so weit wie möglich.

a) $\cos x \cdot \sin x$ b) $x^2 \ln x$ c) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$

d) $\dfrac{\sin x}{x}$ e) $\dfrac{x}{\ln x}$ f) $\dfrac{x \ln x}{\sin x}$

Übung 1.2:2

Berechne die Ableitung von folgenden Funktionen und vereinfache sie so weit wie möglich.

a) $\sin x^2$ b) e^{x^2+x} c) $\sqrt{\cos x}$

d) $\ln \ln x$ e) $x(2x+1)^4$ f) $\cos \sqrt{1-x}$

Übung 1.2:3

Berechne die Ableitung von folgenden Funktionen und vereinfache sie so weit wie möglich.

a) $\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\,)$ b) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ c) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

d) $\sin \cos \sin x$ e) $e^{\sin x^2}$ f) $x^{\tan x}$

Übung 1.2:4

Berechne die zweite Ableitung von folgenden Funktionen und vereinfache sie so weit wie möglich.

a) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $x(\sin \ln x + \cos \ln x)$

1.3 Maximierungs- und Minimierungsprobleme

Inhalt:

- Kurven zeichnen
- Maximierungs- und Minimierungsprobleme

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes wissen:

- Die Definitionen von monoton steigend, streng monoton steigend, monoton fallend, streng monoton fallend, lokales Maximum, globales Maximum, lokales Minimum und globales Minimum.
- Wenn $f\,' > 0$ ist, dann ist f streng monoton steigend und wenn $f\,' < 0$ ist, dann ist f streng monoton fallend.
- Wie man stationäre Stellen findet und deren Charakter bestimmt.
- Wie man mit Hilfe von Vorzeichentabellen der Ableitung Kurven zeichnet.
- Wie man globale Maxima und Minima einer Funktion findet.
- Wie man den Charakter einer stationären Stelle mit der zweiten Ableitung bestimmt.

A - Steigende und fallende Funktionen

Man sagt, dass eine Funktion monoton steigend ist, wenn ihre Ableitung positiv ist. Man sagt monoton fallend, wenn ihre Ableitung negativ ist.

Die formellen Definitionen lauten:

- Eine Funktion f ist monoton steigend in einem bestimmten Intervall, wenn für alle x_1 und x_2 im Intervall gilt

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2).$$

- Eine Funktion f ist monoton fallend in einen bestimmten Intervall, wenn für alle x_1 und x_2 im Intervall gilt

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2).$$

Die Definition sagt uns also, dass eine Stelle rechts von einer bestimmten Stelle immer einen höheren oder zumindest denselben Funktionswert hat wie die linke Stelle. Laut der Definition kann eine konstante Funktion gleichzeitig monoton steigend und monoton fallend sein.

Da dies manchmal unerwünscht ist, definiert man die Begriffe **streng** monoton steigend und **streng** monoton fallend:

- Eine Funktion f ist **streng** monoton steigend in einen bestimmten Intervall, wenn für alle x_1 und x_2 im Intervall gilt
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$
- Eine Funktion f ist **streng** monoton fallend in einem bestimmten Intervall, wenn für alle x_1 und x_2 im Intervall gilt
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

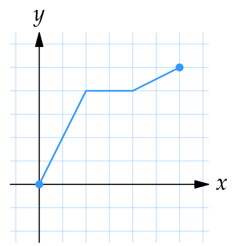
(Eine streng monoton steigende oder fallende Funktion kann nicht konstant sein.)

Beispiel 1

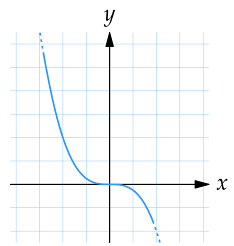
a) Die Funktion $y = f(x)$, deren Graph unten eingezeichnet ist, ist steigend im Intervall $0 \leq x \leq 6$.

b) Die Funktion $y = -x^3/4$ ist streng monoton fallend.

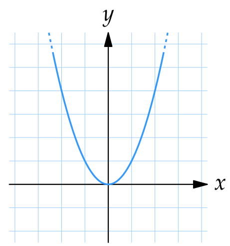
c) Die Funktion $y = x^2$ ist streng monoton steigend für $x \geq 0$.



Graph der Funktion aus a



Graph der Funktion $f(x) = -x^3/4$



Graph der Funktion $f(x) = x^2$

Um zu bestimmen, ob eine Funktion monoton steigend oder fallend ist, verwendet man die Ableitung der Funktion. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in [a,b] \quad &\Rightarrow \quad f(x) \text{ ist (streng) monoton steigend in } [a,b]. \\ f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in [a,b] \quad &\Rightarrow \quad f(x) \text{ ist (streng) monoton fallend in } [a,b]. \end{aligned}$$

Hinweis: Umgekehrt gilt das nicht. Eine Funktion, deren Ableitung in einer bestimmten Stelle null ist, kann sehr wohl streng monoton steigend oder streng monoton fallend sein. Solange die Ableitung nur an einer isolierten Stelle null ist und nicht in einem Intervall, kann die Funktion streng monoton steigend oder streng monoton fallend sein.

B - Stationäre Stellen

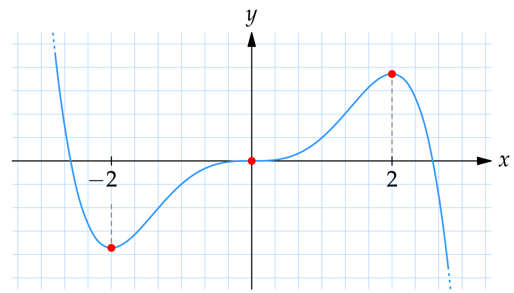
Stellen, in denen $f'(x) = 0$ nennt man stationäre Stellen oder kritische Stellen. Es gibt normalweise drei verschiedene Arten von stationären Stellen:

- Lokale Maxima, für die $f'(x) > 0$ links von der Stelle ist und $f'(x) < 0$ rechts von der Stelle ist.
- Lokale Minima, für die $f'(x) < 0$ links von der Stelle ist und $f'(x) > 0$ rechts von der Stelle ist.
- Sattelpunkte, wo das Vorzeichen von f' auf beiden Seiten des Punktes gleich ist.

Hinweis: An einer Stelle kann ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum liegen, ohne dass $f'(x) = 0$; lies mehr darüber im Abschnitt *Maxima und Minima*.

C - Sattelpunkte

Ein Sattelpunkt ist ein Punkte, in dem die Ableitung einer Funktion null ist (waagerechte Tangente) jedoch die Funktion nicht ihre Monotonieverhalten verändert (Funktion ist links und recht von der Sattelstelle monoton steigend bzw. Funktion ist links und recht von der Sattelstelle monoton fallend).



Die Funktion hat einen lokales Minimum in $x = -2$, einen Sattelpunkt in $x = 0$ und einen lokales Maximum in $x = 2$.

D - Vorzeichentabelle

Indem man das Vorzeichen der Ableitung (+, − oder 0) betrachtet, kann man viele Informationen über die Funktion erhalten.

Um eine Funktion zu untersuchen, macht man eine sogenannte Vorzeichentabelle. Zuerst bestimmt man die x-Werte, bei denen $f'(x) = 0$ und die Stellen, an denen die Ableitung nicht definiert ist. Danach berechnet man das Vorzeichen der Ableitung zwischen allen stationären Stellen.

Beispiel 2

Machen Sie eine Vorzeichentabelle der Funktion $f(x) = x^3 - 12x + 6$ und zeichnen Sie die Funktion.

Die Ableitung der Funktion ist

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2).$$

Der Faktor $x - 2$ ist negativ links von $x = 2$ und positiv rechts von $x = 2$. Der Faktor $x + 2$ ist negativ links von $x = -2$ und positiv rechts von $x = -2$. Mit Hilfe dieser Information erstellen wir eine Tabelle:

x		-2		2	
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

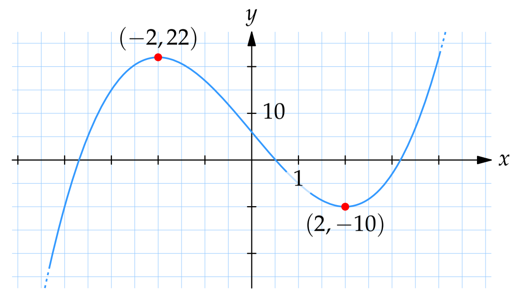
Nachdem die Ableitung das Produkt von $x - 2$ und $x + 2$ ist, können wir das Vorzeichen der Ableitung einfach bestimmen:

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	22	$\searrow$	-10	$\nearrow$

In der letzten Zeile der Tabelle haben wir mit Pfeilen angegeben, ob die Funktion streng monoton steigend ($\nearrow$) oder streng monoton fallend ($\searrow$) im Intervall ist und zusätzlich die Werte der Funktion an den stationären Stellen $x = -2$ und $x = 2$.

Aus der Tabelle sehen wir, dass die Funktion ein lokales Maximum in $(-2, 22)$ hat und ein lokales Minimum in $(2, -10)$ hat. Wir zeichnen mit dieser Information

die Funktion:



E - Maxima und Minima (Extremwerte)

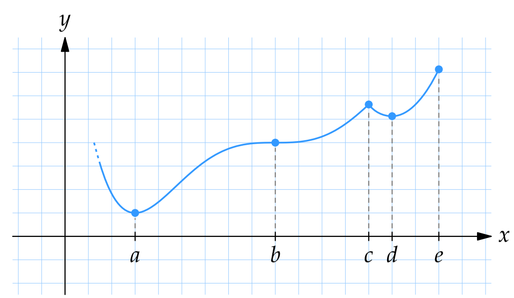
Eine Stelle, an der die Funktion ihren höchsten oder niedrigsten Wert in einer kleinen Umgebung annimmt, nennt man *lokales Maximum* oder *lokales Minimum*. Lokale Maxima und lokale Minima nennt man auch lokale Extrema.

Es gibt drei verschiedene Fälle von lokalen Extrema:

- Eine stationäre Stelle ($f'(x) = 0$).
- Eine Stelle, in dem die Ableitung nicht definiert ist (**singuläre Stelle**).
- An der letzten Stelle des Intervalles, in dem die Funktion definiert ist.

Beispiel 3

Die Funktion unten hat vier lokale Extrema: Lokale Maxima in $x = c$ und $x = e$, und lokale Minima in $x = a$ und $x = d$.



In $x = a$, $x = b$ und $x = d$ ist $f'(x) = 0$, aber nur an den Stellen $x = a$ und $x = d$ sind Extrempunkte, da bei $x = b$ ein Sattelpunkt ist.

In $x = c$ ist die Ableitung nicht definiert. Die Stelle $x = e$ ist eine Randstelle und ordnet somit einen Endpunkt zu.

Wenn man die Extremwerte einer Funktion finden möchte, muss man alle Fälle untersuchen. Folgende Vorgangsweise ist nützlich:

1. Die Funktion ableiten.
2. Untersuchen, ob es Stellen gibt, in denen $f'(x)$ nicht definiert ist.
3. Alle Stellen finden, in denen $f'(x) = 0$ ist.
4. Durch eine Vorzeichentabelle alle Extrema finden.
5. Den Funktionswert für alle Extrempunkte und die Endpunkte berechnen.

Beispiel 4

Bestimme die Extrema der Funktion $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$.

Die Ableitung der Funktion ist

$$y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2).$$

Um das Vorzeichen der Funktion zu bestimmen, zerlegen wir die Funktion in ihre Faktoren. Den Faktor $12x$ haben wir schon und können die Funktion weiter zerlegen, indem wir die Wurzeln von $x^2 + x - 2$ finden,

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \text{oder} \quad x = 1.$$

Also ist $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ und die Ableitung ist

$$y' = 12x(x + 2)(x - 1).$$

Die Nullstellen der Ableitung sind $x = -2$, $x = 0$ und $x = 1$. Zusätzlich können wir das Vorzeichen für jeden einzelnen Term für verschiedene x bestimmen.

x		-2		0		1	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Multiplizieren wir die Vorzeichen in jeder Spalte, erhalten wir das Vorzeichen der Ableitung.

x		-2		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	12	$\searrow$	7	$\nearrow$

Die Kurve hat also lokale Minima in den Punkten $(-2, -20)$ und $(1, 7)$ und ein lokales Maximum im Punkt $(0, 12)$.

Beispiel 5

Bestimme alle Extrema der Funktion $y = x - x^{2/3}$.

Die Ableitung der Funktion ist

$$y' = 1 - \tfrac{2}{3}x^{-1/3} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Von dieser Funktion sehen wir, dass y' für $x = 0$ nicht definiert ist (obwohl y definiert ist). Also hat die Funktion einen singulären Stelle in $x = 0$.

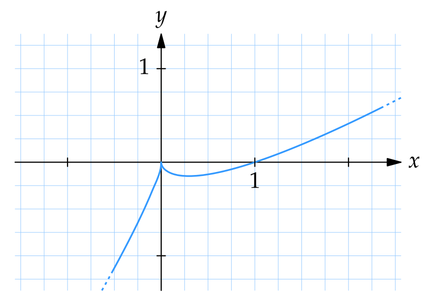
Die stationären Stellen der Funktion erhalten wir durch

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{x} = \tfrac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \tfrac{8}{27}.$$

Also kann die Funktion Extrema in den Stellen $x = 0$ und $x = \frac{8}{27}$ haben. Wir erstellen eine Vorzeichentabelle, um die Stellen weiter zu untersuchen:

x		0		$\frac{8}{27}$	
y'	$+$	nicht def.	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$

Also hat die Funktion einen lokales Maximum im Punkt $(0, 0)$ und einen lokales Minimum im Punkt $\left(\frac{8}{27}, -\frac{4}{27}\right)$.



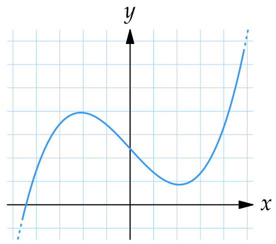
F - Globale Maxima und Minima

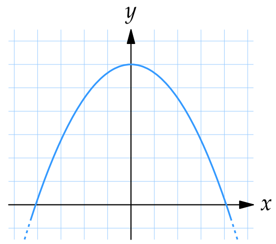
Ein globales Maximum ist ein Punkt, der einen höheren Funktionswert als alle anderen Punkte hat. Ähnlich ist ein globales Minimum ein Punkt, der einen niedrigeren Funktionswert als alle anderen Punkte hat.

Um die globalen Maxima und Minima einer Funktion zu bestimmen, muss man zuerst alle lokalen Maxima und Minima bestimmen und danach den höchsten und niedrigsten Wert von diesen.

Eine Funktion hat nicht immer ein globales Maximum oder Minimum, obwohl sie mehrere lokale Extrempunkte hat.

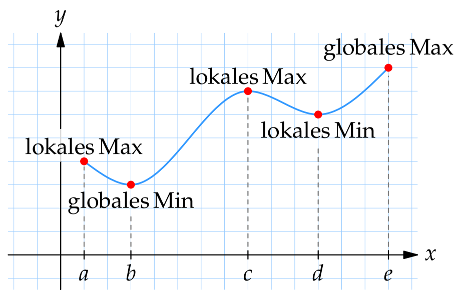
Beispiel 6





Die linke Funktion hat weder ein globales Maximum noch Minimum. Die rechte Funktion hat kein globales Minimum.

Wenn eine Funktion auf ein bestimmtes Intervall begrenzt ist, muss man beachten, dass die Endpunkte ein globales Maximum oder Minimum sein können.



Diese Funktion ist nur im Intervall $a \leq x \leq e$ interessant. Wir sehen, dass das globale Minimum der Funktion an der Stelle $x = b$ ist, und dass das globale Maximum an der Stelle $x = e$ ist.

Beispiel 7

Bestimme das Maximum und Minimum der Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 2$ im Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 1$.

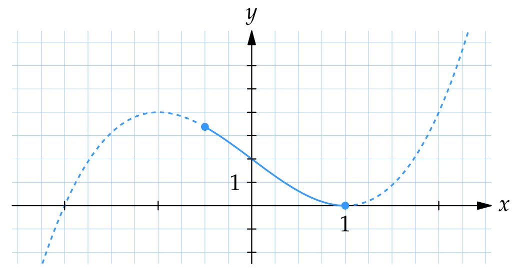
Wir leiten die Funktion $f'(x) = 3x^2 - 3$ ab, und bestimmen so alle stationären Stellen,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Die Stelle $x = -1$ liegt ausserhalb des Intervalles und $x = 1$ liegt am Endpunkt des Intervalles. Die Funktion hat keine singulären Stellen, daher muss das Maximum und das Minimum an einem der Endpunkte liegen,

$$f(-0{,}5) = 3{,}375,$$
$$f(1) = 0.$$

Das Maximum der Funktion ist also 3,375. Das Minimum ist 0 (siehe Figur).



Die Figur zeigt den ganzen Graph der Funktion in dem Bereich, der im Intervall liegt, mit einer durchgehenden Linie.

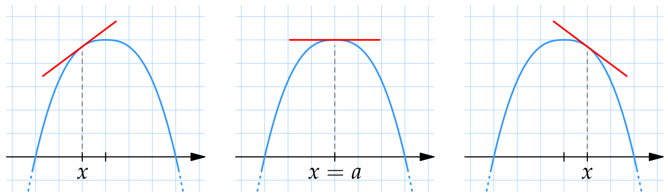
G - Die zweite Ableitung

Das Vorzeichen der Ableitung gibt uns genügend Information darüber, ob eine Funktion monoton steigend oder fallend ist. Ähnlich kann man mit dem Vorzeichen der zweiten Ableitung bestimmen, ob die Ableitung der Funktion monoton steigend oder fallend ist. Dadurch kann man unter anderem den Charakter von Extrema bestimmen.

Falls die Funktion $f(x)$ eine stationäre Stelle in $x = a$ hat, in dem $f''(a) < 0$, ist

1. die Ableitung $f'(x)$ streng monoton fallend in einer Umgebung von $x = a$,
2. $f'(x) > 0$ links von $x = a$, da $f'(a) = 0$ und deshalb auch $f'(x) < 0$ rechts von $x = a$.

Also hat die Funktion $f(x)$ ein lokales Maximum an der Stelle $x = a$.

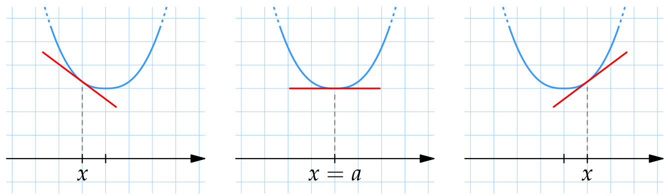


Wenn die Ableitung links von $x = a$ positiv ist, und rechts von $x = a$ negativ ist, hat die Funktion ein lokales Maximum an der Stelle $x = a$.

Wenn die Funktion $f(x)$ eine stationäre Stelle in $x = a$ hat, in dem $f''(a) > 0$, ist

1. die Ableitung $f'(x)$ streng monoton steigend in einer Umgebung von $x = a$,
2. $f'(x) < 0$ links von $x = a$, da $f'(a) = 0$ und deshalb auch $f'(x) > 0$ rechts von $x = a$.

Also hat die Funktion $f(x)$ ein lokales Minimum an der Stelle $x = a$.



Wenn die Ableitung links von $x = a$ negativ ist, und rechts von $x = a$ positiv ist, hat die Funktion ein lokales Minimum an der Stelle $x = a$.

Wenn $f''(a) = 0$, können wir nichts Weiteres über den stationäre Stelle sagen. In diesem Fall müssen wir die Funktion weiter untersuchen, zum Beispiel mit einer Vorzeichentabelle. Achtung: $f''(a) = 0$ bedeutet nicht, dass es sich um einen Sattelpunkt handelt. Obwohl $f''(a) = 0$ für alle Sattelpunkte gilt, gilt nicht das Umgekehrte.

Beispiel 8

Bestimme alle Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ und bestimme deren Charakter mit Hilfe der zweiten Ableitung.

Nachdem die Funktion ein Polynom ist, ist sie überall ableitbar. Alle Extrempunkte müssen daher stationäre Stellen sein. Die Ableitung der Funktion ist $f'(x) = 3x^2 -$

$2x - 1$, und die Wurzeln der Ableitung berechnen wir durch die Gleichung

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{oder} \quad x = -\tfrac{1}{3}.$$

Die Funktion hat also die stationäre Stelle $x = 1$ und $x = -\frac{1}{3}$. Indem wir das Vorzeichen der zweiten Ableitung $f''(x) = 6x - 2$ bestimmen, können wir den Charakter der stationären Stellen bestimmen.

- Für $x = -\frac{1}{3}$ ist $f''(-\frac{1}{3}) = -4 < 0$, also ist $x = -\frac{1}{3}$ ein lokales Maximum.
- Für $x = 1$ ist $f''(1) = 4 > 0$, also ist $x = 1$ ein lokales Minimum.

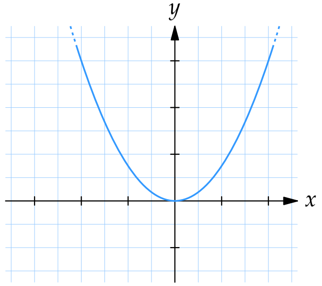
Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

1.3 Übungen

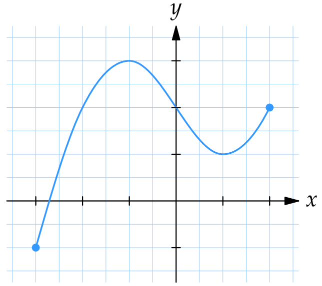
Übung 1.3:1

Bestimme alle stationären Stellen, die Sattelstellen und die lokalen und globalen Extremstellen der Funktion. Bestimme auch, in welchem Intervall die Funktion monoton steigend und fallend ist.

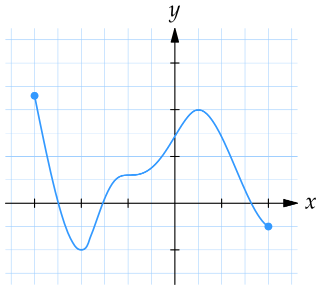
a)



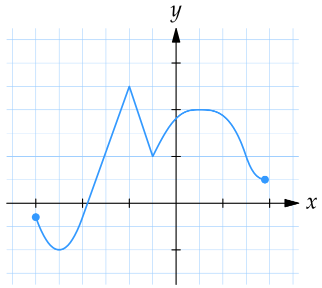
b)



c)



d)



Übung 1.3:2

Bestimme alle lokalen Extremstellen und zeichne den Graph von

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = 2 + 3x - x^2$

c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

d) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x - 15$

Übung 1.3:3

Bestimme alle lokalen Extremstellen und zeichne den Graph von

a) $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$

b) $f(x) = e^{-3x} + 5x$

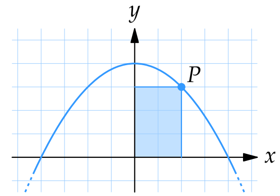
c) $f(x) = x \ln x - 9$

d) $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}$

e) $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$ wenn $-3 \le x \le 3$

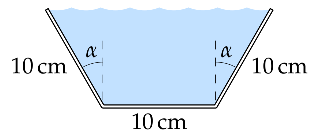
Übung 1.3:4

Wo muss im ersten Quadrant und auf der Kurve $y = 1 - x^2$ der Punkt P liegen, sodass das Rechteck in der Figur die größtmögliche Fläche annimmt.



Übung 1.3:5

Aus einem 30 cm langen Metallblech baut man einen Kanal. Die Kanten werden parallel mit der Längsseite des Bleches aufgebogen — siehe Zeichnung. Für welchen Winkel α kann der Kanal so viel Wasser wie möglich enthalten?



Übung 1.3:6

Eine Tasse hat die Form eines Zylinders. Welche Abmessungen soll die Tasse haben, sodass sie das größtmögliche Volumen V hat?

Übung 1.3:7

Ein Kreissektor wird von einer runden Scheibe ausgeschnitten. Die Scheibe die übrig bleibt wird zu einem Kegel geformt. Welchen Winkel soll der Kreissektor haben, damit der Kegel das größtmögliche Volumen bekommt?

2.1 Einführung zur Integralrechnung

Inhalt:

- Die Definition des Integrals.
- Das Verhältnis zwischen dem Integral und den unbestimmten Integralen.
- Stammfunktionen für x^α, $1/x$, e^x, $\cos x$ und $\sin x$.
- Stammfunktionen für Summen und Differenzen von Funktionen.

Lernziele:

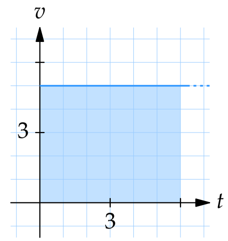
Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes wissen:

- Wie man Integrale als Flächen interpretiert.
- Es gibt andere Interpretationen des Integrals wie Dichte/Masse, Geschwindigkeit/Strecke, Kraft/Energie, etc.
- Wie man Stammfunktionen für x^α, $1/x$, e^{kx}, $\cos kx$, $\sin kx$ und Summen/Differenzen von solchen Termen bestimmt.
- Wie man die Fläche unter einer Funktion berechnet.
- Wie man die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnet.
- Nicht alle Funktionen haben eine analytische Stammfunktion wie zum Beispiel e^{x^2}, $(\sin x)/x$, $\sin\sin x$, etc.

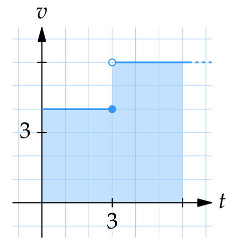
A - Die Fläche unter einer Funktion

Wir haben im vorigen Abschnitt die Ableitung von Funktionen studiert und viele interessante Eigenschaften der Ableitung gefunden. In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die Fläche zwischen der x-Achse und einer Funktion viele wichtige Eigenschaften und Anwendungen hat.

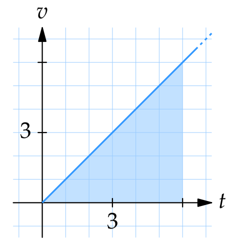
Wenn wir zum Beispiel die Geschwindigkeit eines Objektes in einen v-t-Graph einzeichnen, können wir die drei unten dargestellten Fälle erhalten:



Das Objekt bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit 5.



Das Objekt bewegt sich zuerst mit der Geschwindigkeit 4 bis zur Zeit $t = 3$, wo es plötzlich die Geschwindigkeit 6 erhält.



Die Geschwindigkeit wächst linear.

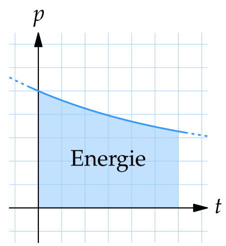
Die vom Objekt zurückgelegte Strecke ist in den drei Fällen:

$$s(6) = 5 \cdot 6 = 30\,\text{m}, \qquad s(6) = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 30\,\text{m}, \qquad s(6) = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\,\text{m}.$$

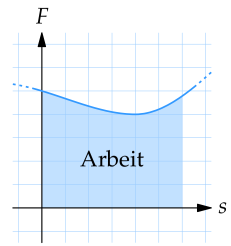
In allen drei Fällen sehen wir, dass die zurückgelegte Strecke der Fläche unter dem Graph der Funktion entspricht.

Hier werden noch einige Beispiele gezeigt, was die Fläche unter einem Graph bedeuten kann.

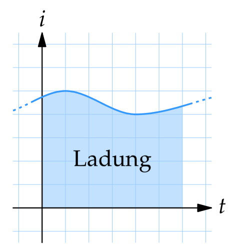
Beispiel 1



Eine Solarzelle mit der Leistung p liefert die Energie, die proportional zur Fläche unter dem Graph ist.



Die Kraft F die entlang einer Strecke wirkt, leistet die Arbeit, die proportional zur Fläche unter dem Graph ist.



Ein Kondensator, der mit dem Strom i geladen wird, enthält eine Ladung, die proportional zur Fläche unter dem Graph ist.

B - Die Bezeichnung des Integrals

Um die Fläche unter einer Funktion zu beschreiben, verwendet man das *Integralzeichen* $\int$.

Das Integral einer positiven Funktion $f(x)$ von a bis b ist dasselbe wie die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse und zwischen zwei Vertikalen den Geraden $x = a$ und $x = b$, und wird wie folgt geschrieben:

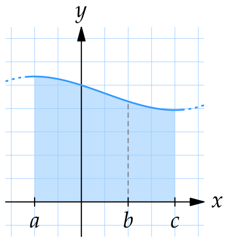
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Die Zahlen a und b nennt man Integrationsgrenzen. Die Funktion $f(x)$ nennt man Integrand und x nennt man die Integrationsvariable.

Beispiel 2

Die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ von $x = a$ bis $x = c$ ist gleich groß wie die Fläche von $x = a$ bis $x = b$ plus die Fläche von $x = b$ bis $x = c$. Dies bedeutet, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

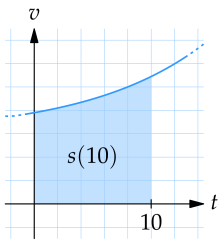


Beispiel 3

Wenn für einen Gegenstand die Geschwindigkeit $v(t)$ auf der rechten Seite des Graphen liegt, hat er nach der Zeit 10 s die Strecke zurück gelegt, die gleich ist zu der Fläche unter dem Graphen, also das Integral des Graphen,

$$s(10) = \int_0^{10} v(t)\,dt.$$

Hinweis: Wir nehmen hier an, dass Geschwindigkeit und Strecke mit derselben Längeneinheit gemessen werden.



Beispiel 4

Wasser fließt in einen Tank mit der Geschwindigkeit $f(t)$ Liter/s zur Zeit t. Das Integral

$$\int_9^{10} f(t)\,dt$$

beschreibt, wie viel Wasser während der zehnten Sekunde in den Tank fließt.

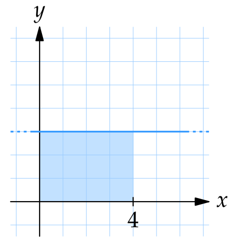
Beispiel 5

Berechnen Sie das Integral

a) $\displaystyle\int_0^4 3\,dx$

Das Integral ist dasselbe wie die Fläche unter der Kurve (Gerade) $y = 3$ von $x = 0$ bis $x = 4$, also ein Rechteck mit der Basis 4 und der Höhe 3,

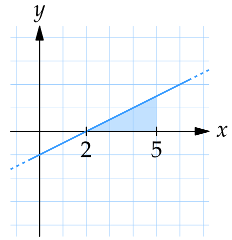
$$\int_0^4 3\,dx = 4 \cdot 3 = 12.$$



b) $\displaystyle\int_2^5 \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$

Das Integral ist die Fläche unter der Kurve $y = x/2 - 1$ von $x = 2$ bis $x = 5$, also ein Dreieck mit der Basis 3 und der Höhe 1,5,

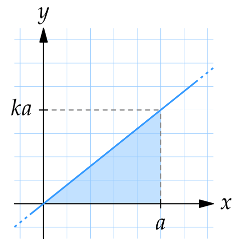
$$\int_2^5 \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx = \frac{3 \cdot 1{,}5}{2} = 2{,}25.$$



c) $\displaystyle\int_0^a kx\,dx \quad$ wobei $k > 0$.

Das Integral ist die Fläche unter der Geraden $y = kx$, von $x = 0$ bis $x = a$ und daher ein Dreieck mit der Basis a und der Höhe ka,

$$\int_0^a kx\,dx = \frac{a \cdot ka}{2} = \frac{ka^2}{2}.$$



C - Stammfunktionen und unbestimmte Integrale

Die Funktion F ist eine *Stammfunktion* von f falls $F'(x) = f(x)$ in einen bestimmten Intervall. Falls $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, ist es leicht zu sehen, dass auch $F(x) + C$ eine Stammfunktion ist für eine beliebige Konstante C. Man kann auch zeigen, dass die Funktion $F(x) + C$ alle möglichen Stammfunktionen von $f(x)$ bezeichnet. Dieser Ausdruck wird als *unbestimmtes Integral* bezeichnet und man schreibt

$$\int f(x)\,dx\,.$$

Beispiel 6

a) $F(x) = x^3 + \cos x - 5$ ist die Stammfunktion von $f(x) = 3x^2 - \sin x$, nachdem

$$F'(x) = D\,(x^3 + \cos x - 5) = 3x^2 - \sin x - 0 = f(x).$$

b) $G(t) = e^{3t+1} + \ln t$ ist die Stammfunktion von $g(t) = 3e^{3t+1} + 1/t$, weil

$$G'(t) = D\left(e^{3t+1} + \ln t\right) = e^{3t+1} \cdot 3 + \frac{1}{t} = g(t).$$

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x + C$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^3 - 1$, wobei C eine beliebige Konstante ist, weil

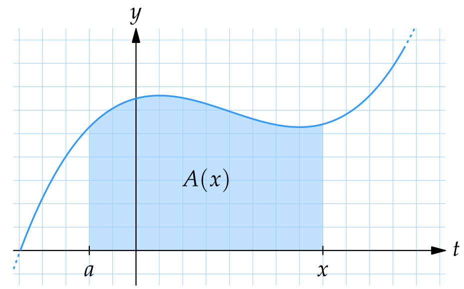
$$F'(x) = D\,(\frac{1}{4}x^4 - x + C) = x^3 - 1 = f(x).$$

D - Verhältnis zwischen dem Integral und den unbestimmten Integralen

Wir wissen bereits, dass die Fläche unter einer Funktion dem Integral der Funktion entspricht.

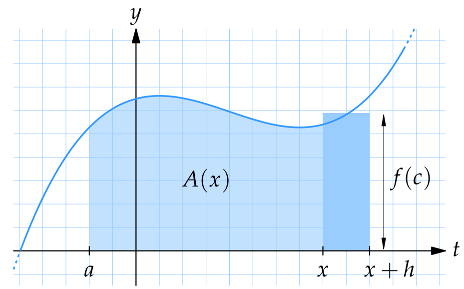
Wir nehmen an, dass f stetig in einem Intervall ist. Der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ hängt dann von den Integrationsgrenzen a und b ab. Lassen wir aber die obere Grenze frei sein, sodass sie x statt b ist, wird das Integral eine Funktion von x sein. Um dies

deutlicher zu machen verwenden wir die Integrationsvariable t statt x:



$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Wir werden jetzt zeigen, dass A die Stammfunktion von f ist.



Die gesamte Fläche under der Kurve von $t = a$ bis $t = x + h$ ist $A(x+h)$ und ist ungefähr $A(x)$ plus die Fläche des Rechtecks zwischen $t = x$ und $t = x + h$, also

$$A(x+h) \approx A(x) + h \cdot f(c)$$

wo c eine Zahl zwischen x und $x + h$ ist. Wir können den Ausdruck als

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(c)$$

schreiben. Lassen wir $h \to 0$, bekommen wir auf der linken Seite $A'(x)$, und die rechte Seite wird $f(x)$ und daher ist

$$A'(x) = f(x).$$

Also ist die Funktion $A(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

E - Integrale berechnen

Wir wollen mit Hilfe der Stammfunktionen das Integral berechnen. Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + C.$$

Wenn $b = a$ ist, ist die linke Seite null (Die Fläche unter dem Graphen der Funktion zwischen a und a). Darum muss die Konstante C so gewählt werden muss, dass für $b = a$ die rechte Seite ebenfalls null ist. Also ergibt

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C = 0$$

dass $C = -F(a)$ sein muss. Wenn wir zusammenfassen, ergibt sich, dass

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Wir können natürlich hier die Integrationsvariable x wählen und erhalten dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Die Berechnung von Integralen erfolgt in zwei Schritten. Zuerst berechnet man die Stammfunktion und dann berechnet man den Wert der Stammfunktion in den Integrationsgrenzen. Man schreibt gewöhnlich

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

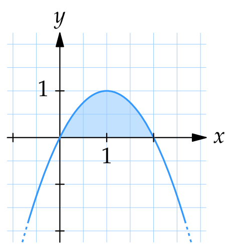
Beispiel 7

Die Fläche zwischen der Funktion $y = 2x - x^2$ und der x-Achse kann durch den Integral

$$\int_0^2 (2x - x^2)\,dx$$

berechnet werden. Nachdem $x^2 - x^3/3$ die Stammfunktion des Integranden ist, ist der Integral

$$\int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \Big[x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^2$$
$$= (2^2 - \tfrac{1}{3}2^3) - (0^2 - \tfrac{1}{3}0^3)$$
$$= 4 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3}.$$



Die Fläche ist also $\frac{4}{3}$.

Hinweis: Das Integral hat keine Einheit, aber die Fläche kann eine Einheit haben.

F - Stammfunktionen

Um häufige Funktionen abzuleiten, gibt es generelle Ableitungsregeln. Die umgekehrte Rechenoperation durchzuführen ist aber viel komplizierter, nachdem es keine generellen Regeln für die Stammfunktionen gibt. In manchen Fällen kann man aber die Stammfunktionen bestimmen, indem man die Ableitung *rückwärts* ausführt: d.h. man sucht eine Funktion, deren Ableitung der Integrand ist.

Mit Hilfe der bekannten Ableitungsregeln erhalten wir folgende Stammfunktionen

Integral und Stammfunktion	Begründung (durch Ableitung)
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{für } n \neq -1$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = x^n$
$\int x^{-1}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$(\ln\lvert x\rvert + C)' = \frac{1}{\lvert x\rvert} \cdot \operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$D\,(e^x + C) = e^x$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$

Beispiel 8

a) $$\int (x^4 - 2x^3 + 4x - 7)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{4x^2}{2} - 7x + C = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x^2 - 7x + C$$

b) $$\int \Big(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x^3}\Big)dx = \int \Big(3x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-3}\Big)dx = \frac{3x^{-1}}{-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C = -3x^{-1} + \tfrac{1}{4}x^{-2} + C = -\frac{3}{x} + \frac{1}{4x^2} + C$$

c) $$\int \frac{2}{3x}\,dx = \int \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \tfrac{2}{3}\ln\lvert x\rvert + C$$

d) $$\int (e^x - \cos x - \sin x)\,dx = e^x - \sin x + \cos x + C$$

G - Für die innere Ableitung kompensieren

Wenn man eine verkettete Funktion ableitet, benutzt man die Kettenregel. Dies bedeutet, dass man die äußere Ableitung der Funktion mit der inneren Ableitung der Funktion multipliziert. Falls die innere Funktion eine lineare Funktion ist, ist die innere Ableitung eine Konstante. Wenn wir die Ableitung einer solchen Funktion integrieren möchten, können wir einfach die Stammfunktion durch die innere Ableitung dividieren, um die innere Ableitung zu kompensieren.

Beispiel 9

a) $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$

b) $\int \sin 5x\,dx = -\frac{\cos 5x}{5} + C$

c) $\int (2x+1)^4\,dx = \frac{(2x+1)^5}{5\cdot 2} + C$

Beispiel 10

a) $\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$

b) $\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k} + C$

c) $\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$

Diese Methode funktioniert also nur dann, wenn die innere Ableitung eine Konstante ist.

H - Integrationsregeln

Durch die Definition des Integrals, kann man einfach zeigen, dass:

1. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

   Beim Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert das Integral das Vorzeichen.

2. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$

   Die Summe der Integrale (mit denselben Integrationsgrenzen) ist das Integral über die Summe der Integranden.

3. $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

   Das Integral über ein Vielfaches des Integranden ist das Vielfache des Integrals über den einfachen Integranden.

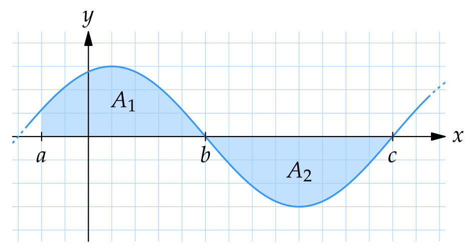
4. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

   Die Summe der Integrale mit demselben Integranden über direkt nebeneinander liegende Intervalle ist gleich dem Integral über das Gesamtinterval.

Außerdem haben Integrale, wo die Funktion negativ ist, ein negatives Vorzeichen, sind aber ansonsten gleich:

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx.$$



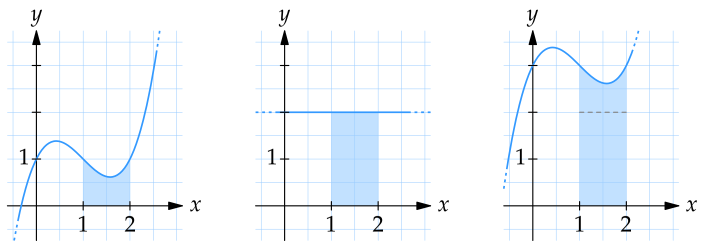
Die gesamte Fläche ist $A_1 + A_2 = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$.

Hinweis: Der Wert eines Integrals kann sehr wohl negativ sein, nur die Fläche ist immer positiv.

Beispiel 11

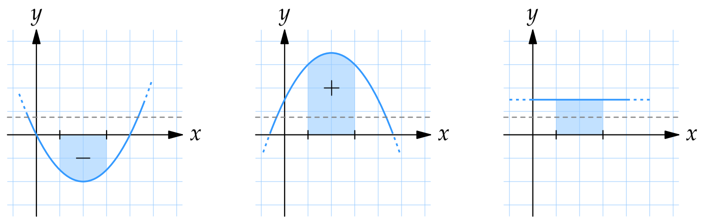
a) $\int_1^2 (x^3-3x^2+2x+1)\,dx + \int_1^2 2\,dx = \int_1^2 (x^3-3x^2+2x+1+2)\,dx$

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + 3x\right]_1^2$$
$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 4 - 2^3 + 2^2 + 3\cdot 2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 1^4 - 1^3 + 1^2 + 3\cdot 1\right)$$
$$= 6 - 3 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{11}{4}$$



Das linke Bild zeigt die Fläche unter der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$. Das mittlere Bild zeigt die Fläche unter der Funktion $g(x) = 2$. Das rechte Bild zeigt die Fläche unter der Summe der beiden Funktionen, also $f(x) + g(x)$.

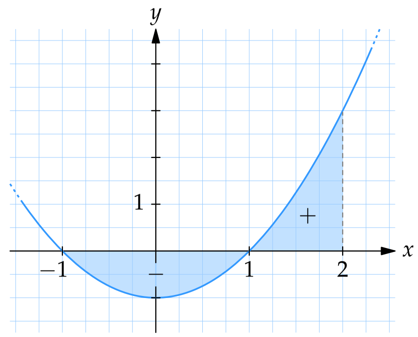
b) $$\int_1^3 (x^2/2 - 2x)\,dx + \int_1^3 (2x - x^2/2 + 3/2)\,dx = \int_1^3 3/2\,dx$$
$$= \left[\tfrac{3}{2}x\right]_1^3 = \tfrac{3}{2}\cdot 3 - \tfrac{3}{2}\cdot 1 = 3$$



Die Funktion $f(x) = x^2/2 - 2x$ (siehe linkes Bild) und die Funktion $g(x) = 2x - x^2/2 + 3/2$ (siehe mittleres Bild) sind Spiegelungen voneinander in der Geraden $y = 3/4$. Also ist die Summe $f(x) + g(x) = 3/2$, also eine Konstante. Daher ist das Integral der Summe ein Rechteck mit der Basis 2 und der Höhe 3/2 (siehe rechtes Bild).

c) $$\int_1^2 \frac{4x^2 - 2}{3x}\,dx = \int_1^2 \frac{2(2x^2-1)}{3x}\,dx = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{2x^2-1}{x}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\int_1^2 \Big(2x - \frac{1}{x}\Big)\,dx = \frac{2}{3}\Big[x^2 - \ln x\Big]_1^2$$
$$= \frac{2}{3}\Big((4 - \ln 2) - (1 - \ln 1)\Big) = \tfrac{2}{3}(3 - \ln 2) = 2 - \tfrac{2}{3}\ln 2$$

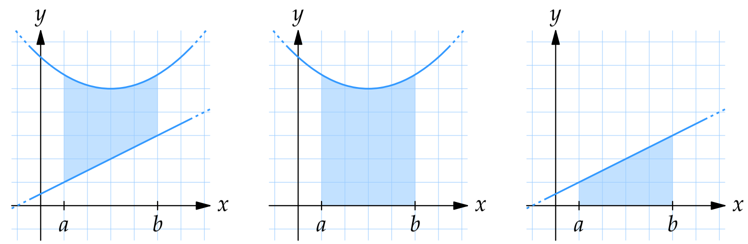
d) $$\int_{-1}^2 (x^2 - 1)\,dx = \Big[\frac{x^3}{3} - x\Big]_{-1}^2 = (\tfrac{8}{3} - 2) - (\tfrac{-1}{3} + 1) = 0$$



Die Figur zeigt die Funktion $f(x) = x^2 - 1$ und die Flächen, die oberhalb und unterhalb der x-Achse liegen.

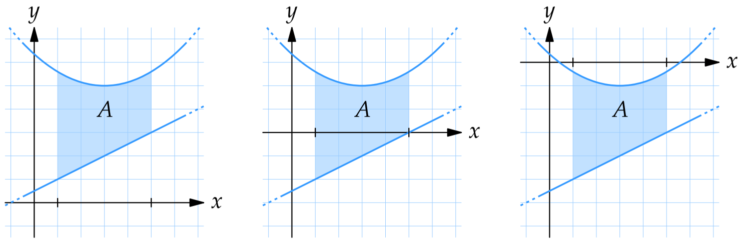
I - Die Fläche zwischen Funktionen

Wenn $f(x) \geq g(x)$ in einem Intervall $a \leq x \leq b$ ist, ist die Fläche zwischen den beiden Funktionen in diesem Intervall
$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx,$$
oder vereinfacht
$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



Wenn $f(x)$ und $g(x)$ beide positiv sind und $f(x)$ größer ist als $g(x)$, ist die Fläche zwischen f und g (siehe linkes Bild), der Unterschied in Fläche von den Flächen unter den Funktionen f (siehe mittleres Bild) und g (siehe rechtes Bild).

Es ist egal, ob $f(x) < 0$ oder $g(x) < 0$ so lange $f(x) \geq g(x)$. Der Wert der Fläche ist unabhängig davon, ob die Funktionen positiv oder negativ sind. Dies wird aus folgenden Bildern ersichtlich:



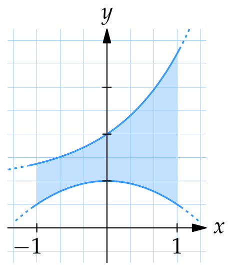
Die Fläche zwischen den beiden Funktionen ändert sich nicht wenn wir beide Funktionen in die y-Richtung verschieben. Die Fläche zwischen den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist dasselbe wie die Fläche zwischen den Funktionen $f(x) - 3$ und $g(x) - 3$ (siehe mittleres Bild), als auch zwischen den Funktionen $f(x) - 6$ und $g(x) - 6$ (siehe rechtes Bild).

Beispiel 12

Berechne die Fläche zwischen den Kurven $y = e^x + 1$ und $y = 1 - x^2/2$ und den Geraden $x = -1$ und $x = 1$.

Da $e^x + 1 > 1 - x^2/2$ im ganzen Intervall gilt, berechnen wir die die Fläche so:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (e^x + 1)\,dx - \int_{-1}^{1} \Big(1 - \frac{x^2}{2}\Big)\,dx
&= \int_{-1}^{1} \Big(e^x + \frac{x^2}{2}\Big)\,dx \\
&= \Big[e^x + \frac{x^3}{6}\Big]_{-1}^{1} \\
&= \Big(e^1 + \frac{1^3}{6}\Big) - \Big(e^{-1} + \frac{(-1)^3}{6}\Big) \\
&= e - \frac{1}{e} + \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$



Beispiel 13

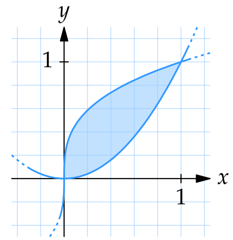
Berechne die Fläche des endlichen Gebietes zwischen den Funktionen $y = x^2$ und $y = \sqrt[3]{x}$.

Die Schnittpunkte der Kurven erhalten wir, wenn deren y-Werte gleich sind,

$$\begin{aligned}
x^2 = x^{1/3} \quad &\Leftrightarrow \quad x^6 = x \quad \Leftrightarrow \quad x(x^5 - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 1.
\end{aligned}$$

Zwischen $x = 0$ und $x = 1$ ist $\sqrt[3]{x} > x^2$ und wir berechnen die Fläche zwischen den Funktionen als

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^{1/3} - x^2)\,dx &= \Big[\frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 \\
&= \Big[\frac{3x^{4/3}}{4} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 \\
&= \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{3} - (0 - 0) = \tfrac{5}{12}.
\end{aligned}$$

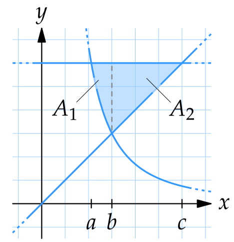


Beispiel 14

Berechne die Fläche des begrenzten Gebietes zwischen den Funktionen $y = 1/x^2$, $y = x$ und $y = 2$.

In der Abbildung sehen wir, dass die Funktionen unser Gebiet in zwei Teilgebiete A_1 und A_2 aufteilen. Die Fläche des gesamten Gebiets ist die Summe der Flächen der beiden Teilgebiete,

$$A_1 = \int_a^b \Big(2 - \frac{1}{x^2}\Big)\,dx \quad \text{und} \quad A_2 = \int_b^c (2 - x)\,dx.$$



Wir suchen zuerst die Schnittstellen $x = a$, $x = b$ und $x = c$:

- Die Schnittstelle $x = a$ erhalten wir durch die Gleichung

$$\frac{1}{x^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Die negative Wurzel ist für uns uninteressant.)

- Die Schnittstelle $x = b$ erhalten wir durch die Gleichung

$$\frac{1}{x^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

- Die Schnittstelle $x = c$ erhalten wir durch die Gleichung $x = 2$.

Das Integral ist also

$$A_1 = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \Big(2 - \frac{1}{x^2}\Big)\,dx = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} (2 - x^{-2})\,dx = \Big[\,2x - \frac{x^{-1}}{-1}\,\Big]_{1/\sqrt{2}}^{1}$$
$$= \Big[\,2x + \frac{1}{x}\,\Big]_{1/\sqrt{2}}^{1} = (2+1) - \Big(\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\Big) = 3 - 2\sqrt{2},$$
$$A_2 = \int_{1}^{2} (2-x)\,dx = \Big[\,2x - \frac{x^2}{2}\,\Big]_{1}^{2} = (4-2) - \Big(2 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2},$$

und die Fläche ist

$$A_1 + A_2 = 3 - 2\sqrt{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{2} - 2\sqrt{2}.$$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

2.1 Übungen

Übung 2.1:1

Interpretiere folgende Integrale als eine Fläche und berechne die Integrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2\,dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{1} (2x+1)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} (3-2x)\,dx$ d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x|\,dx$

Übung 2.1:2

Berechne die Integrale.

a) $\displaystyle\int_{0}^{2} (x^2+3x^3)\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x-2)(x+1)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{4}^{9} \Big(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\,dx$ d) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

Übung 2.1:3

Berechne die Integrale.

a) $\displaystyle\int \sin x\,dx$ b) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx$

c) $\displaystyle\int e^{2x}(e^x+1)\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}\,dx$

Übung 2.1:4

a) Berechne die Fläche zwischen $y = \sin x$ und der x-Achse für $0 \le x \le 5\pi/4$.

b) Berechne die Fläche zwischen der Funktion $y = -x^2 + 2x + 2$ und der x-Achse.

c) Berechne die Fläche des endlichen Gebietes zwischen den Funktionen $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ und $y = 8 - \frac{1}{8}x^2$.

d) Berechne die Fläche des Gebietes zwischen den Funktionen $y = x+2$, $y = 1$ und $y = 1/x$.

e) Berechne die Fläche des Gebietes, das durch die Ungleichung $x^2 \le y \le x+2$ definiert ist.

Übung 2.1:5

Berechne das Integral.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$ (Hinweis: erweitere Bruch mit dem konjugierten Nenner)

b) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ (Hinweis: schreibe den Integrand mit einer trigonometrischen Identität um)

2.2 Integration durch Substitution

Inhalt:

- Integration durch Substitution

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes wissen:

- Wie die Formel für die Integration durch Substitution hergeleitet wird.
- Wie man Integrale mit Integration durch Substitution löst.
- Wie man die Integrationsgrenzen bei der Substitution richtig ändert.
- Wann Integration durch Substitution möglich ist.

A - Integration durch Substitution

Wenn man eine Funktion nicht direkt integrieren kann, kann man die Funktion manchmal durch eine Substitution integrieren. Die Formel für die Integration durch Substitution ist einfach die Kettenregel für Ableitungen rückwärts.

Die Kettenregel $\frac{d}{dx}f(u(x)) = f'(u(x))\,u'(x)$ kann in Integralform geschrieben werden:

$$\int f'(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = f(u(x)) + C$$

oder

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = F(u(x)) + C,$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist, d.h. es gilt $F' = f$.

Wir zeigen eine eigenenständige Herleitung dieser Integrationsformel: Wir beginnen mit der normalen Intagrationsformel. Der Integrand f hat die Stammfunktion F und u ist die Integrationsvariable

$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$

Wir ersetzen jetzt die Integrationsvariable u durch die Funktion $u(x)$. Dadurch verändert sich $f(u)$ zu $f(u(x))$ und du zu $du(x)$. Wir wissen aber eigentlich nicht, was $du(x)$ ist. In der nächsten Zeile tun wir so, als wäre $dx/dx = 1$ wie bei „normalen" Brüchen,

$$du(x) = \frac{dx}{dx}\,du(x) = \frac{1}{dx}\,du(x)\,dx = \frac{d}{dx}\,u(x)\,dx = u'(x)\,dx.$$

Also ist das unbekannt $du(x)$ dasselbe wie das bekannte $u'(x)\,dx$: Beim Integrieren mit der Integrationsvariable x wird der Integrand mit $u'(x)$ multipliziert. Also haben wir

$$\int f(u)\,du = F(u) + C \;\text{ mit } u(x) \text{ statt } u \text{ ergibt } \int f(u(x))\,u'(x)\,dx = F(u(x)) + C\,.$$

Daher kann man den komplizierteren Integranden $f(u(x))\,u'(x)$ ersetzen (mit x als Integrationsvariable) mit dem einfacheren Ausdruck $f(u)$ (mit u als Integrationsvariable). Dies wird Substitution genannt, und kann angewendet werden, wenn der Integrand auf der Form $f(u(x))\,u'(x)$ ist.

Hinweis: Die Voraussetzung, um die Integration durch Substitution zu verwenden ist, dass $u(x)$ im Intervall (a, b) differenzierbar ist.

Beispiel 1

Berechne das Integral $\int 2x\,e^{x^2}\,dx$.

Wenn wir die Substitution $u(x) = x^2$ machen, erhalten wir $u'(x) = 2x$. Durch die Substitution wird e^{x^2}, e^u und $u'(x)\,dx$, also $2x\,dx$ wird du,

$$\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \int e^{x^2} \cdot 2x\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

Beispiel 2

Bestimme das Integral $\int (x^3+1)^3\,x^2\,dx$.

Wir substituieren, $u = x^3 + 1$. Dies ergibt $u' = 3x^2$, oder $du = 3x^2\,dx$, und daher ist

$$\int (x^3+1)^3 x^2\,dx = \int \frac{(x^3+1)^3}{3} \cdot 3x^2\,dx = \int \frac{u^3}{3}\,du$$
$$= \frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(x^3+1)^4 + C.$$

Beispiel 3

Bestimme das Integral $\int \tan x \, dx\,,\quad$ wo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Wir schreiben $\tan x$ wie $\sin x / \cos x$ und machen die Substitution $u = \cos x$,

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \begin{bmatrix} u = \cos x \\ u' = -\sin x \\ du = -\sin x \, dx \end{bmatrix}$$
$$= \int -\frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

B - Die Integrationsgrenzen bei Substitution

Wenn man bestimmte Integrale berechnet, gibt es zwei Methoden, mit den Integrationsgrenzen umzugehen. Entweder substituiert man $u = u(x)$, berechnet eine Stammfunktion in u und ersetzt danach die neue Variable mit der alten oder man ändert die Integrationsgrenzen während der Integration. Das folgende Beispiel zeigt die beiden Methoden.

Beispiel 4

Berechne das Integral $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$.

Methode 1

Wir substituieren $u = e^x$, und dies ergibt $u' = e^x$ und $du = e^x \, dx = u \, dx$ bzw $dx = (1/u) \, du$.

Wir ermitteln eine Stammfunktion für die Integration mit der Integrationsvariable u,

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{u}{1+u} \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{1+u} du = \ln|1+u|.$$

Jetzt schreiben wir wieder $u(x)$ statt u und setzen die Integrationsgrenzen ein

$$\Big[\ln|1+u(x)|\Big]_{x=0}^{x=2} = \Big[\ln(1+e^x)\Big]_0^2 = \ln(1+e^2) - \ln 2 = \ln\frac{1+e^2}{2}.$$

Methode 2

Wir substituieren $u = e^x$ und dies ergibt $u' = e^x$ und $du = e^x \, dx$. Die Integrationsgrenzen verändern sich durch die Substitution: Wenn x von 0 bis 2 läuft, läuft $u = u(x)$ von $u(0) = e^0 = 1$ bis $u(2) = e^2$,

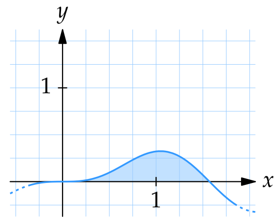
$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{1+u} du = \Big[\ln|1+u|\Big]_1^{e^2} = \ln(1+e^2) - \ln 2 = \ln\frac{1+e^2}{2}.$$

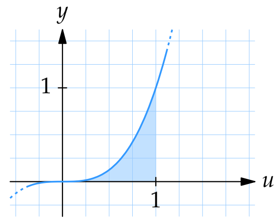
Beispiel 5

Bestimme das Integral $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, \cos x \, dx$.

Durch die Substitution $u = \sin x$ erhalten wir $du = \cos x \, dx$ und die Integrationsgrenzen sind daher $u = \sin 0 = 0$ und $u = \sin(\pi/2) = 1$. Das Integral ist daher

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, \cos x \, dx = \int_0^1 u^3 \, du = \Big[\tfrac{1}{4}u^4\Big]_0^1 = \tfrac{1}{4} - 0 = \tfrac{1}{4}.$$





Das linke Bild zeigt die Funktion $\sin^3 x \cos x$ und die rechte Figur zeigt die Funktion u^3 die wir nach der Substitution erhalten. Durch die Substitution erhalten wir ein neues Intervall. Der Wert des Integrals ändert sich aber nicht.

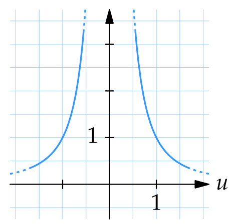
Beispiel 6

Betrachte folgende Rechnungen, bei denen sich ein Fehler eingeschlichen hat.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \begin{bmatrix} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \\ u(-\pi/2) = -1 \\ u(\pi/2) = 1 \end{bmatrix} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{u^2} du = \Big[-\frac{1}{u}\Big]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2.$$

Die Rechnung muss falsch sein, weil links ein Integral steht mit einem positiven Integrand. Das Integral wird also positiv sein. Auf der rechten Seite steht jedoch eine negative Zahl.

Der Fehler bei der Rechnung ist, dass die Substitution angewendet wurde für $f(u) = 1/u^2$ und diese Funktion nicht im ganzen Intervall $[-1, 1]$ definiert ist ($f(0)$ ist nicht definiert: Division durch Null). Wenn man die Substitutionsregel anwenden möchte, muss die äussere Funktion f stetig sein und die innere Funktion u stetig differenzierbar.



Graph von $f(u) = 1/u^2$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

2.2 Übungen

Übung 2.2:1

Berechne die Integrale

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3x-1)^4}$ durch die Substitution $u = 3x - 1$

b) $\displaystyle\int (x^2+3)^5 x\,dx$ durch die Substitution $u = x^2 + 3$

c) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$ durch die Substitution $u = x^3$

Übung 2.2:2

Berechne die Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos 5x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{2x+3}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{3x+1}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{1-x}\,dx$

Übung 2.2:3

Berechne die Integrale.

a) $\displaystyle\int 2x\sin x^2\,dx$ b) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Übung 2.2:4

Verwende die Formel

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$$

um die Integrale zu berechnen.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2+3}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$ d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

2.3 Partielle Integration

Inhalt:

- Partielle Integration.

Lernziele:
Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes wissen:

- Wie die partielle Integration hergeleitet wird.
- Wie man Integrale durch partielle Integration, kombiniert mit Substitutionen, löst.

A - Partielle Integration

Partielle Integration kann hilfreich sein, um Produkte zu integrieren. Die Methode stammt von der Ableitungsregel für Produkte. Wenn u und v zwei differenzierbare Funktionen sind, erhalten wir durch die Produktregel die Ableitung

$$D\,(\,u\,v) = (D\,u)\,v + u\,D\,v$$

oder in einer anderen Notation (= Schreibweise)

$$(\,u\,v)\,' = u'\,v + u\,v'\,.$$

Wenn wir jetzt beide Seiten integrieren, erhalten wir

$$u\,v = \int (\,uv)'\,dx = \int (\,u'\,v + u\,v'\,)\,dx = \int u'\,v\,dx + \int u\,v'\,dx$$

und so erhalten wir die Regel für partielle Integration.

Partielle Integration:

$$\int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx\,.$$

Wenn man Probleme mit partieller Integration löst, erhofft man sich, dass das Integral $\int u'\,v\,dx$ einfacher zu berechnen ist als $\int u\,v'\,dx$. Hier ist v eine beliebige Stammfunktion von v' (vorzugsweise die einfachste) und u' ist die Ableitung von u.

Obwohl partielle Integration sehr hilfreich sein kann, gibt es keine Garantie, dass es zu einem einfacheren Integral führt. Oft muss man sorgfältig wählen, welche Funktion u sein soll und welche v' sein soll. Das folgende Beispiel zeigt, wie man vorgeht.

Beispiel 1

Bestimme das Integral $\displaystyle\int x\,\sin x\,dx$.

Wenn wir $u = \sin x$ und $v' = x$ wählen, erhalten wir $u' = \cos x$ und $v = x^2/2$ und es ergibt sich durch die Formel für partielle Integration

$$\int x\cdot\sin x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\cos x\,dx.$$

Dieses Integral ist aber nicht einfacher zu lösen als das ursprüngliche Integral.

Wenn wir aber $u = x$ und $v' = \sin x$ wählen, wird $u' = 1$ und $v = -\cos x$,

$$\int x\cdot\sin x\,dx = -x\cdot\cos x - \int(-1)\cdot\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Beispiel 2

Bestimme das Integral $\displaystyle\int x^2\,\ln x\,dx$.

Wir wählen $u = \ln x$ und $v' = x^2$, da wir durch Ableitung die Logarithmusfunktion beseitigen können. Nachdem $u' = 1/x$ und $v = x^3/3$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int x^2\cdot\ln x\,dx &= \frac{x^3}{3}\cdot\ln x - \int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}\cdot\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}x^3(\ln x - \tfrac{1}{3}) + C.\end{aligned}$$

Beispiel 3

Bestimme das Integral $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$.

Wir wählen $u = x^2$ und $v' = e^x$, daher ist $u' = 2x$ und $v = e^x$. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2x\,e^x\,dx.$$

Wir müssen hier noch einmal partielle Integration anwenden, um das Integral $\int 2x\,e^x\,dx$ zu berechnen. Hier wählen wir $u = 2x$ und $v' = e^x$, daher ist $u' = 2$ und $v = e^x$,

$$\int 2x\,e^x\,dx = 2x\,e^x - \int 2\,e^x\,dx = 2x\,e^x - 2e^x + C.$$

Das ursprüngliche Integral ist

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2x\,e^x + 2e^x + C.$$

Beispiel 4

Bestimme das Integral $\int e^x \cos x\,dx$.

Wir integrieren den Faktor e^x und leiten den Faktor $\cos x$ ab,

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x)\,dx.$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx.$$

Dieses Integral berechnen wir durch partielle Integration, indem wir den Faktor e^x integrieren und den Faktor $\sin x$ ableiten,

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Hier erscheint wieder unser ursprüngliches Integral.
Wir haben also

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Sammeln wir alle Integrale auf der linken Seite, so erhalten wir

$$\int e^x \cos x\,dx = \tfrac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

Hier erhielten wir kein einfacheres Integral durch partielle Integration, aber wir erhielten eine Gleichung, mit der wir unser Integral lösen konnten. Dies kommt nicht selten vor, wenn man trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen integriert.

Beispiel 5

Bestimme das Integral $\int_0^1 \frac{2x}{e^x}\,dx$.

Das Integral kann als

$$\int_0^1 \frac{2x}{e^x}\,dx = \int_0^1 2x \cdot e^{-x}\,dx$$

geschrieben werden. Wählen wir $u = 2x$ und $v' = e^{-x}$, erhalten wir durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\,e^{-x}\,dx &= \Big[-2x\,e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 2\,e^{-x}\,dx \\ &= \Big[-2x\,e^{-x}\Big]_0^1 + \Big[-2\,e^{-x}\Big]_0^1 \\ &= (-2\cdot e^{-1}) - 0 + (-2\cdot e^{-1}) - (-2) \\ &= -\frac{2}{e} - \frac{2}{e} + 2 = 2 - \frac{4}{e}.\end{aligned}$$

Beispiel 6

Bestimme das Integral $\int \ln\sqrt{x}\,dx$.

Zuerst machen wir die Substitution $u = \sqrt{x}$, wodurch wir $du = dx/2\sqrt{x} = dx/2u$ erhalten. Also ist $dx = 2u\,du$ und wir erhalten das Integral

$$\int \ln\sqrt{x}\,dx = \int \ln u \cdot 2u\,du.$$

Danach wenden wir partielle Integration an. Wir leiten den Faktor $\ln u$ ab und integrieren den Faktor $2u$,

$$\begin{aligned}\int \ln u \cdot 2u\,du &= u^2 \ln u - \int u^2 \cdot \frac{1}{u}\,du = u^2 \ln u - \int u\,du \\ &= u^2 \ln u - \frac{u^2}{2} + C = x \ln\sqrt{x} - \frac{x}{2} + C \\ &= x\big(\ln\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}\big) + C.\end{aligned}$$

Hinweis: Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Integrand als $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$ zu schreiben und die Produkte $\frac{1}{2}\ln x$ mit partieller Integration zu integrieren.

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

2.3 Übungen

Übung 2.3:1

Berechne die Integrale.

a) $\displaystyle\int 2x\,e^{-x}\,dx$ b) $\displaystyle\int (x+1)\sin x\,dx$

c) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$ d) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$

Übung 2.3:2

Berechne die Integrale.

a) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \tan x\,dx$ d) $\displaystyle\int \ln x\,dx$

3.1 Rechnungen mit komplexen Zahlen

Inhalt:

- Real- und Imaginärteil
- Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen
- Komplexe Konjugation
- Multiplikation und Division von komplexen Zahlen

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes wissen:

- Wie man komplexe Ausdrücke mit den vier Grundrechenarten vereinfacht.
- Wie man komplexe Gleichungen löst und die Antwort vereinfacht.

A - Einführung

Obwohl die reellen Zahlen die ganze Zahlengerade füllen, gibt es algebraische Gleichungen, die keine Lösungen in den reellen Zahlen haben. Gleichungen mit der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

haben nicht immer Lösungen in den reellen Zahlen. Zum Beispiel hat die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine reellen Lösungen, weil keine reelle Zahl $x^2 = -1$ erfüllt. Wir können uns aber vorstellen, dass wir $\sqrt{-1}$ als die Zahl definieren, die die Gleichung $x^2 = -1$ erfüllt und so rechnen als wäre $\sqrt{-1}$ eine normale Zahl.

Obwohl die Zahl $\sqrt{-1}$ nicht messbar ist, gibt es viele Anwendungen, wo genau diese Zahl sehr nützlich ist.

Beispiel 1

Wenn wir die Summe der Nullstellen der Gleichung $x^2 - 2x + 2 = 0$ suchen, finden wir zuerst die Nullstellen $x_1 = 1 + \sqrt{-1}$ und $x_2 = 1 - \sqrt{-1}$. Diese Lösungen enthalten $\sqrt{-1}$. Wenn wir ganz normal mit $\sqrt{-1}$ rechnen, sehen wir, dass die Summe von x_1 und x_2, $1 + \sqrt{-1} + 1 - \sqrt{-1} = 2$ eine ganz normale reelle Zahl ist.

Wir haben die „imaginäre“ Zahl $\sqrt{-1}$ verwendet, um als Antwort eine reelle Zahl zu erhalten.

B - Definition der komplexen Zahlen

Die Begriffe „reell“ (für normale Zahlen) und „imaginär“ (für Zahlen wie $\sqrt{-1}$) sind etwas irreführend, weil ja alle Zahlen menschliche Konstruktionen sind. Trotzdem verwendet man noch heutzutage diese Begriffe, die einmal durch die Skepsis für Zahlen wie $\sqrt{-1}$ entstanden.

Da die Zahl $\sqrt{-1}$ nicht durch eine Dezimalbruchentwicklung geschrieben werden kann, wie es zum Beispiel bei $\sqrt{2}$ möglich ist, müssen wir solche Zahlen mit einer besonderen Einheit beschreiben. Diese Einheit nennt man gewöhnlich i (oder manchmal auch j). Die Zahl i wird als „imaginäre Einheit“ bezeichnet, und Zahlen auf der Form bi, wo b reell ist, werden „imaginäre Zahlen“ genannt. Eine *komplexe Zahl* ist eine Zahl mit der Form

$$z = a + bi,$$

wo a und b reelle Zahlen sind und i die Gleichung $i^2 = -1$ erfüllt.

Wenn $a = 0$ nennt man die Zahl „rein imaginär“. Wenn $b = 0$ ist die Zahl reell. Die reellen Zahlen sind also eine Teilmenge der komplexen Zahlen, die wir mit $\mathbf{C}$ bezeichnen.

Eine beliebige komplexe Zahl bezeichnet man meistens mit z. Wenn $z = a + bi$, wo a und b reell sind, ist a der Realteil und b der Imaginärteil von z. Für diese verwendet man folgende Bezeichnungen

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re} z, \\ b &= \operatorname{Im} z. \end{aligned}$$

Wenn man mit komplexen Zahlen rechnet, rechnet man genauso wie mit reellen Zahlen, aber man beachtet, dass $i^2 = -1$.

C - Addition und Subtraktion

Wenn man zwei komplexe Zahlen addiert, addiert man jeweils deren Real- und Imaginärteil für sich.

Wenn $z = a + bi$ und $w = c + di$ zwei komplexe Zahlen sind, dann ist

$$z + w = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i,$$
$$z - w = a + bi - (c + di) = a - c + (b - d)i.$$

Beispiel 2

a) $(3 - 5i) + (-4 + i) = -1 - 4i$

b) $\left(\frac{1}{2} + 2i\right) - \left(\frac{1}{6} + 3i\right) = \frac{1}{3} - i$

c) $\dfrac{3 + 2i}{5} - \dfrac{3 - i}{2} = \dfrac{6 + 4i}{10} - \dfrac{15 - 5i}{10} = \dfrac{-9 + 9i}{10} = -0{,}9 + 0{,}9i$

D - Multiplikation

Die Multiplikation von komplexen Zahlen ist genauso wie die Multiplikation von reellen Zahlen definiert, nur unter der zusätzlichen Bedingung, dass $i^2 = -1$. Allgemein gilt für zwei komplexe Zahlen $z = a + bi$ und $w = c + di$, dass

$$z\,w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Beispiel 3

a) $3(4 - i) = 12 - 3i$

b) $2i(3 - 5i) = 6i - 10i^2 = 10 + 6i$

c) $(1 + i)(2 + 3i) = 2 + 3i + 2i + 3i^2 = -1 + 5i$

d) $(3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 - 4i^2 = 13$

e) $(3 + i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3i + i^2 = 8 + 6i$

f) $i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$

g) $i^{23} = i^{22} \cdot i = (i^2)^{11} \cdot i = (-1)^{11} i = -i$

E - Komplexe Konjugation

Wenn $z = a + bi$ nennt man $\overline{z} = a - bi$ die zu z konjugierte komplexe Zahl. (Die Umkehrung gilt auch, nämlich, dass z die konjugiert komplexe Zahl von $\overline{z}$ ist). Man erhält dadurch folgende Regeln

$$z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2\ \mathrm{Re}\, z,$$
$$z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = 2b\, i = 2i\ \mathrm{Im}\, z.$$

Am wichtigsten ist aber, dass man, wenn man die Regel der Differenz von zwei Quadraten anwendet, folgendes erhält

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Das Produkt einer komplexen Zahl z mit der zugehörigen konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$ ist also immer reell,

$$z\,\overline{z} \in \mathbf{R}.$$

Beispiel 4

a) $z = 5 + i$ wird zu $\overline{z} = 5 - i$.

b) $z = -3 - 2i$ wird zu $\overline{z} = -3 + 2i$.

c) $z = 17$ wird zu $\overline{z} = 17$.

d) $z = i$ wird zu $\overline{z} = -i$.

e) $z = -5i$ wird zu $\overline{z} = 5i$.

Beispiel 5

a) Wenn $z = 4 + 3i$ erhält man

- $z + \overline{z} = 4 + 3i + 4 - 3i = 8$
- $z - \overline{z} = 6i$
- $z \cdot \overline{z} = 4^2 - (3i)^2 = 16 + 9 = 25$

b) Wenn man für z $\operatorname{Re} z = -2$ und $\operatorname{Im} z = 1$ einsetzt, erhält man

- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z = -4$
- $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z = 2i$
- $z \cdot \bar{z} = (-2)^2 + 1^2 = 5$

F - Division

Um den Quotienten von zwei komplexen Zahlen zu berechnen, erweitert man den Bruch mit dem konjugiert komplexen Nenner. Weil $z\bar{z} \in \mathbf{R}$, erhält man einen reellen Nenner. Für $z = a + bi$ und $w = c + di$ gilt im Allgemeinen:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i.$$

Beispiel 6

a) $$\frac{4+2i}{1+i} = \frac{(4+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-4i+2i-2i^2}{1-i^2} = \frac{6-2i}{2} = 3-i$$

b) $$\frac{25}{3-4i} = \frac{25(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{25(3+4i)}{3^2-16i^2} = \frac{25(3+4i)}{25} = 3+4i$$

c) $$\frac{3-2i}{i} = \frac{(3-2i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-3i+2i^2}{-i^2} = \frac{-2-3i}{1} = -2-3i$$

Beispiel 7

a) $$\frac{2}{2-i} - \frac{i}{1+i} = \frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} - \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4+2i}{5} - \frac{1+i}{2}$$
$$= \frac{8+4i}{10} - \frac{5+5i}{10} = \frac{3-i}{10}$$

b) $$\frac{1-\frac{2}{1-i}}{2i+\frac{i}{2+i}} = \frac{\frac{1-i}{1-i}-\frac{2}{1-i}}{\frac{2i(2+i)}{(2+i)}+\frac{i}{2+i}} = \frac{\frac{1-i-2}{1-i}}{\frac{4i+2i^2+i}{2+i}} = \frac{\frac{-1-i}{1-i}}{\frac{-2+5i}{2+i}}$$

$$= \frac{-1-i}{1-i} \cdot \frac{2+i}{-2+5i} = \frac{(-1-i)(2+i)}{(1-i)(-2+5i)} = \frac{-2-i-2i-i^2}{-2+5i+2i-5i^2}$$
$$= \frac{-1-3i}{3+7i} = \frac{(-1-3i)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)} = \frac{-3+7i-9i+21i^2}{3^2-49i^2}$$
$$= \frac{-24-2i}{58} = \frac{-12-i}{29}$$

Beispiel 8

Bestimme die reelle Zahl a so, dass der Ausdruck $\dfrac{2-3i}{2+ai}$ reell ist.

Wir erweitern den Bruch mit dem konjugiert komplexen Nenner, sodass wir den Ausdruck in Real- und Imaginärteil aufteilen können,

$$\frac{(2-3i)(2-ai)}{(2+ai)(2-ai)} = \frac{4-2ai-6i+3ai^2}{4-a^2i^2} = \frac{4-3a-(2a+6)i}{4+a^2}.$$

Der Ausdruck ist reell, wenn der Imaginärteil 0 ist, also

$$2a+6=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-3.$$

G - Gleichungen

Wenn zwei komplexe Zahlen $z = a + bi$ und $w = c + di$ gleich sind, müssen deren Real- und Imaginärteile gleich sein und daher ist $a = c$ und $b = d$. Wenn man komplexe Gleichungen mit der Unbekannten z löst, schreibt man oft $z = a + bi$ und vergleicht die Real- und Imaginärteile der beiden Seiten der Gleichung miteinander.

Beispiel 9

a) Löse die Gleichung $3z + 1 - i = z - 3 + 7i$.

Wir sammeln alle z auf der linken Seite der Gleichung, indem wir z von beiden Seiten subtrahieren,

$$2z + 1 - i = -3 + 7i.$$

Jetzt subtrahieren wir $1-i$ von beiden Seiten,

$$2z = -4+8i.$$

Also ist $z = \dfrac{-4+8i}{2} = -2+4i.$

b) Löse die Gleichung $z(-1-i) = 6-2i.$

Wir dividieren beide Seiten durch $-1-i$ um z zu erhalten

$$z = \frac{6-2i}{-1-i} = \frac{(6-2i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-6+6i+2i-2i^2}{(-1)^2-i^2} = \frac{-4+8i}{2} = -2+4i.$$

c) Löse die Gleichung $3iz-2i = 1-z.$

Wir addieren z und $2i$ auf beiden Seiten und erhalten

$$3iz+z = 1+2i \quad\Leftrightarrow\quad z(3i+1) = 1+2i.$$

Das ergibt

$$z = \frac{1+2i}{1+3i} = \frac{(1+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i+2i-6i^2}{1-9i^2} = \frac{7-i}{10}.$$

d) Löse die Gleichung $2z+1-i = \bar{z}+3+2i.$

Die Gleichung enthält z und $\bar{z}$. Deshalb ist es am einfachsten, wenn wir annehmen, dass $z = a+ib$ und die Gleichung für a und b lösen, indem wir den Real- und Imaginärteil jeder Seite Identifizieren,

$$2(a+bi)+1-i = (a-bi)+3+2i.$$

Also

$$(2a+1)+(2b-1)i = (a+3)+(2-b)i,$$

das ergibt

$$\begin{cases} 2a+1 = a+3, \\ 2b-1 = 2-b, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$$

Die Antwort ist daher $z = 2+i.$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

3.1 Übungen

Übung 3.1:1

Schreibe folgende komplexe Zahlen in der Form $a+bi$, wobei a und b reelle Zahlen sind.

a) $(5-2i)+(3+5i)$

b) $3i-(2-i)$

c) $i(2+3i)$

d) $(3-2i)(7+5i)$

e) $(1+i)(2-i)^2$

f) $i^{20}+i^{11}$

Übung 3.1:2

Schreibe folgende komplexe Zahlen in der Form $a+bi$, wobei a und b reelle Zahlen sind.

a) $\dfrac{3-2i}{1+i}$

b) $\dfrac{3i}{4-6i} - \dfrac{1+i}{3+2i}$

c) $\dfrac{(2-i\sqrt{3})^2}{1+i\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{5-\dfrac{1}{1+i}}{3i+\dfrac{i}{2-3i}}$

Übung 3.1:3

Bestimme die reelle Zahl a so, dass der Ausdruck $\dfrac{3+i}{2+ai}$ rein imaginär ist (also, dass der Realteil 0 ist).

Übung 3.1:4

Löse folgende Gleichungen.

a) $z+3i = 2z-2$

b) $(2-i)\,z = 3+2i$

c) $iz+2 = 2z-3$

d) $(2+i)\,\bar{z} = 1+i$

e) $\dfrac{iz+1}{z+i} = 3+i$

f) $(1+i)\,\bar{z}+iz = 3+5i$

3.2 Polarform

Inhalt:

- Die komplexe Zahlenebene
- Addition und Subtraktion in der komplexen Zahlenebene
- Betrag und Argument
- Polarform
- Multiplikation und Division in Polarform
- Multiplikation mit i in der komplexen Zahlenebene

Lernziele:

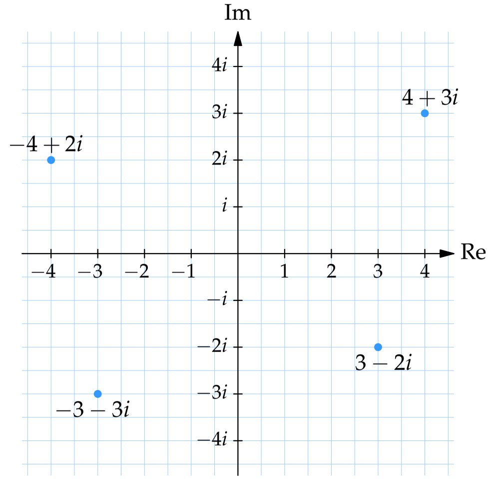
Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes wissen:

- Wie die arithmetischen Rechnungen in der komplexen Zahlenebene geometrisch zu verstehen sind.
- Wie man komplexe Zahlen zwischen der Form $a + ib$ und der Polarform umwandelt.

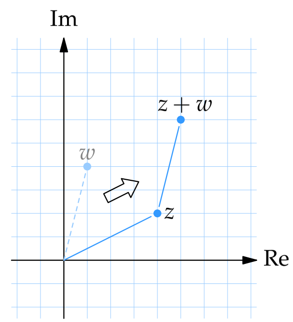
A - Die komplexe Zahlenebene

Nachdem eine komplexe Zahl $z = a + bi$ aus einem Realteil a und einem Imaginärteil b besteht, kann man eine komplexe Zahl z wie ein Zahlenpaar (a, b) in einem Koordinatensystem sehen. Dieses Koordinatensystem konstruieren wir, indem wir eine reelle Achse und eine imaginäre Achse rechtwinklig zueinander einzeichnen. Jetzt entspricht jede komplexe Zahl einem eindeutigen Punkt in der komplexen Zahlenebene. Diese geometrische Interpretation der komplexen Zahlen nennt man die *komplexe Zahlenebene*.

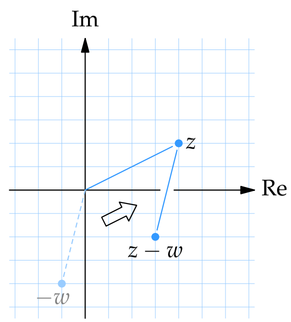
Hinweis: Die reellen Zahlen sind komplexe Zahlen, bei denen der Imaginärteil 0 ist und die daher auf der reellen Achse liegen. Daher kann man die Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen so sehen, dass man die Dimension der Zahlengerade auf eine Ebene erweitert.



Generell kann man komplexe Zahlen wie Vektoren behandeln.



Geometrisch erhält man die Zahl $z + w$ indem man den Vektor von 0 bis w parallel zu z verschiebt.



Die Subtraktion $z - w$ kann wie $z + (-w)$ geschrieben werden und geometrisch interpretiert werden, als ob man den Vektor von 0 bis $-w$ parallel bis z verschiebt.

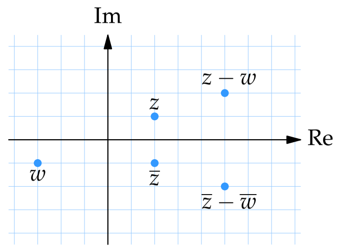
Beispiel 1

Mit $z = 2 + i$ und $w = -3 - i$ zeichnen wir z, w, $\overline{z}$, $\overline{z} - \overline{w}$ und $z - w$ in der komplexen Zahlenebene.

Wir haben

- $\overline{z} = 2 - i$,
- $\overline{w} = -3 + i$,
- $z - w = 2 + i - (-3 - i)$
  $= 5 + 2i$,
- $\overline{z} - \overline{w} = 2 - i - (-3 + i)$
  $= 5 - 2i \quad (= \overline{z - w})$.

Beachte, dass die konjugiert komplexen Zahlen Spiegelbilder in der reellen Achse sind.



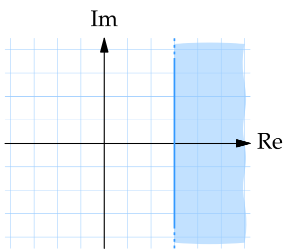
Beispiel 2

Zeichne alle Zahlen z in der komplexen Zahlenebene, die folgende Bedingungen erfüllen:

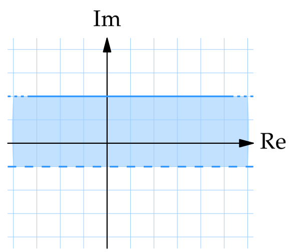
a) $\mathrm{Re}\, z \geq 3$,

b) $-1 < \mathrm{Im}\, z \leq 2$.

Die erste Ungleichung definiert die linke Fläche und die zweite Ungleichung definiert die rechte Fläche.



Alle Zahlen die $\mathrm{Re}\, z \geq 3$ erfüllen, haben einen Realteil, der größer als 3.



Alle Zahlen die $-1 < \mathrm{Im}\, z \leq 2$ erfüllen, haben einen Imaginärteil, der zwischen -1 und 2 liegt. Die untere Gerade ist gestrichelt und dies bedeutet, dass die Punkte auf dieser Gerade nicht zum Gebiet gehören.

B - Der Betrag komplexer Zahlen

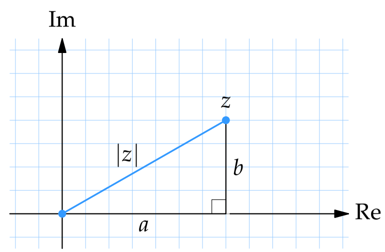
Die reellen Zahlen können wir einfach ordnen, da größere Zahlen rechts von kleineren Zahlen auf der Zahlengerade liegen.

Für komplexe Zahlen ist dies aber nicht möglich. Man kann die komplexen Zahlen nicht nach Größe ordnen. Zum Beispiel kann man nicht sagen, ob $z = 1 - i$ oder $w = -1 + i$ am größten ist. Mit dem Begriff *Betrag* kann man aber auch ein Größenmaß für komplexe Zahlen einführen.

Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ ist der Betrag $|z|$ definiert als

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

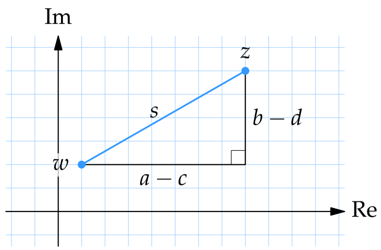
Wir sehen hier, dass $|z|$ eine reelle Zahl ist und, dass $|z| \geq 0$. Für eine reelle Zahl ist $b = 0$ und daher ist $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ wie gewohnt. Geometrisch ist der Betrag einer komplexen Zahl der Abstand vom Punkt $(0,0)$ zu einer komplexen Zahl mit den Koordinaten (a,b), nach dem Gesetz des Pythagoras.



C - Abstand zwischen komplexen Zahlen

Mit der Formel für den Abstand zwischen zwei Punkten in einer Ebene können wir den Abstand s zwischen zwei komplexen Zahlen $z = a + ib$ und $w = c + id$ (siehe Bild) mit der Abstandsformel berechnen

$$s = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$



Da $z - w = (a-c) + i(b-d)$, erhalten wir

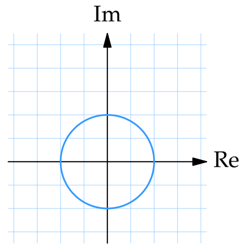
$$|z - w| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = \text{der Abstand zwischen } z \text{ und } w.$$

Beispiel 3

Zeichne in der komplexen Zahlenebene die folgende Menge.

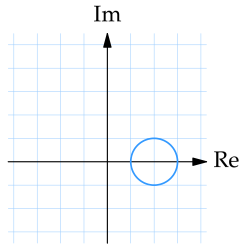
a) $|\,z\,| = 2$

Diese Gleichung beschreibt alle Zahlen, die den Abstand 2 zum Punkt $(0,0)$ haben. Die Gleichung beschreibt also einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius 2.



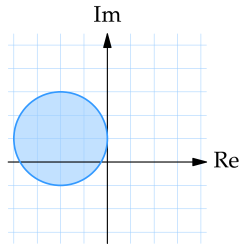
b) $|\,z-2\,| = 1$

Diese Gleichung wird von allen Zahlen erfüllt, deren Abstand von der Zahl 2 gleich 1 ist. Also ein Kreis mit dem Mittelpunkt $z = 2$ und dem Radius 1.



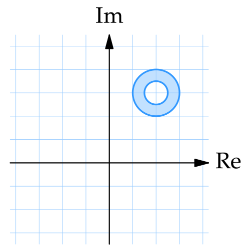
c) $|\,z+2-i\,| \leq 2$

Die linke Seite kann als $|\,z-(-2+i)\,|$ geschrieben werden, daher beschreibt die Ungleichung alle Zahlen, deren Abstand zur Zahl $-2+i$ geringer als 2 ist. Das ist ein Kreis mit dem Radius 2 und dem Mittelpunkt $-2+i$.



d) $\frac{1}{2} \leq |\,z-(2+3i)\,| \leq 1$

Die Ungleichung beschreibt alle Zahlen, deren Abstand zur Zahl $z = 2+3i$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 ist.



Beispiel 4

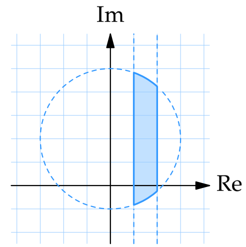
Zeichne in der komplexen Zahlenebene alle Zahlen ein, die die folgenden (Un)gleichungen erfüllen:

a) $\begin{cases} |\,z-2i\,| \leq 3 \\ 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2 \end{cases}$

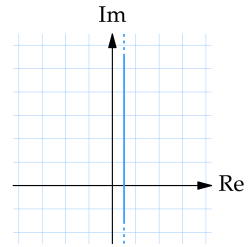
Die erste Ungleichung gibt an, dass die Zahlen im Kreis mit dem Radius 3 um den Mittelpunkt $2i$ liegen müssen. Die zweite Ungleichung ist ein vertikaler Streifen von Zahlen, deren Realteil zwischen 1 und 2 liegt. Die Zahlen, die in beiden Gebieten liegen, erfüllen auch beide Ungleichungen.

b) $|\,z+1\,| = |\,z-2\,|$

Die Gleichung kann wie $|\,z-(-1)\,| = |\,z-2\,|$ geschrieben werden. Also muss z denselben Abstand zu -1 wie zu 2 haben. Diese Bedingung ist von allen Zahlen z erfüllt, die den Realteil $\frac{1}{2}$ haben.



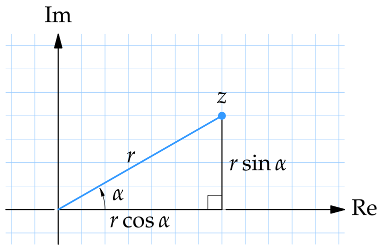
Das gestrichelte Gebiet besteht aus den Punkten, die die Ungleichungen $|z-2i| \leq 3$ und $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$ erfüllen.



Die Zahlen, die $|z+1| = |z-2|$ erfüllen, liegen auf der Gerade von Zahlen deren Realteil $\frac{1}{2}$.

D - Polarform

Anstatt komplexe Zahlen $z = x + iy$ mit deren kartesischen Koordinaten zu beschreiben, kann man polare Koordinaten verwenden. Die Darstellung einer komplexen Zahl erfolgt durch Betrag und Argument (Winkel) der Zahl (siehe Bild).



Nachdem $\cos\alpha = x/r$ und $\sin\alpha = y/r$ ist $x = r\cos\alpha$ und $y = r\sin\alpha$. Die Zahl $z = x + iy$ kann also als

$$z = r\cos\alpha + i\, r\sin\alpha = r(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$$

geschrieben werden. Dies nennt man die Polarform der komlexen Zahl z. Der Winkel α wird das Argument von z genannt und wird geschrieben als

$$\alpha = \arg z.$$

Den Winkel α kann man bestimmen, indem man die Gleichung $\tan\alpha = y/x$ löst. Nachdem diese Gleichung unendlich viele Lösungen hat, ist das Argument nicht eindeutig definiert. Meistens wählt man das Argument so, dass es zwischen 0 und 2π oder zwischen $-\pi$ und π liegt. Dabei ist darauf zu achten, den Winkel dazu anzupassen in welchem Quadranten sich die komplexe Zahl in der Zahlenebene befindet.

Die reelle Zahl r ist der Abstand der Zahl zum Punkt (0,0), also der Betrag von z,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |\,z\,|.$$

Beispiel 5

Schreibe folgende komplexe Zahlen in Polarform:

a) -3

Da $|-3| = 3$ und $\arg(-3) = \pi$, ist $-3 = 3(\cos\pi + i\,\sin\pi)$.

b) i

Da $|\,i\,| = 1$ und $\arg i = \pi/2$, ist $i = \cos(\pi/2) + i\,\sin(\pi/2)$.

c) $1 - i$

Der Betrag ist $|\,1 - i\,| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Die Zahl liegt im vierten Quadranten, und hat den Winkel $\pi/4$ zu der positiven reellen Achse. Daher ist das Argument $\arg(1 - i) = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$. Und daher ist $1 - i = \sqrt{2}\,(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4))$.

d) $2\sqrt{3} + 2i$

Wir berechnen zuerst den Betrag

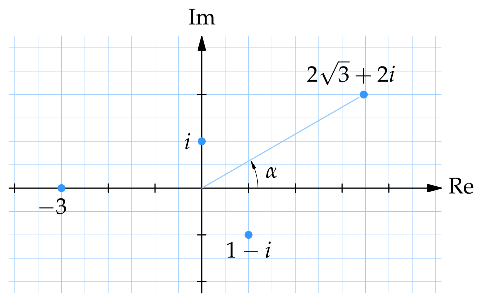
$$|\,2\sqrt{3} + 2i\,| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Wir benennen das Argument α. Das Argument erfüllt die Gleichung

$$\tan\alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und da die Zahl im ersten Quadranten liegt, ist $\alpha = \pi/6$ und daher

$$2\sqrt{3} + 2i = 4\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\Big).$$



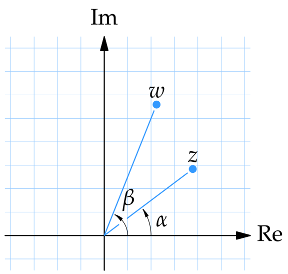
E - Multiplikation und Division in Polarform

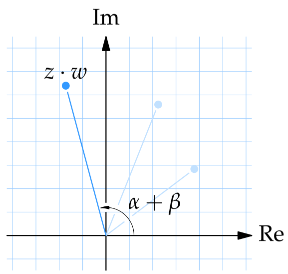
Der große Vorteil der Polarform ist, dass die Multiplikation und Division von komplexen Zahlen sich sehr einfach ausführen lässt. Für zwei komplexe Zahlen $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ und $w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)$ kann man mit Hilfe von trigonometrischen Identitäten zeigen, dass

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z|\,|w|\,\big(\cos(\alpha+\beta) + i\,\sin(\alpha+\beta)\big), \\ \frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|}\big(\cos(\alpha-\beta) + i\,\sin(\alpha-\beta)\big). \end{aligned}$$

Wenn man zwei komplexe Zahlen multipliziert, werden deren Beträge multipliziert und deren Argumente addiert. Wenn man zwei komplexe Zahlen dividiert, werden deren Beträge dividiert und deren Argumente subtrahiert. Zusammengefasst gilt also

$$\begin{aligned} |z\cdot w| &= |z|\cdot|w| \qquad &\text{und}\qquad \arg(z\cdot w) &= \arg z + \arg w, \\ \left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|} \qquad &\text{und}\qquad \arg\Big(\frac{z}{w}\Big) &= \arg z - \arg w. \end{aligned}$$





Beispiel 6

Vereinfache folgende Ausdrücke, indem Du die Ausdrücke in Polarform schreibst.

a) $\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\Big)\Big/\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\Big)$

Wir schreiben den Zähler und Nenner jeweils in Polarform,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} &= 1\cdot\Big(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\sin\frac{7\pi}{4}\Big), \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} &= 1\cdot\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4}\Big). \end{aligned}$$

Es folgt jetzt, dass

$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\Big)\Big/\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\Big) &= \frac{\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\sin\frac{7\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4}} \\ &= \cos\Big(\frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\Big) + i\,\sin\Big(\frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\Big) = \cos\pi + i\,\sin\pi = -1. \end{aligned}$$

b) $(-2-2i)(1+i)$

Wir schreiben die beiden Faktoren jeweils in Polarform,

$$\begin{aligned} -2-2i &= \sqrt{8}\Big(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\sin\frac{5\pi}{4}\Big), \\ 1+i &= \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\Big). \end{aligned}$$

Durch die Multiplikationsregeln der Polarform folgt, dass

$$\begin{aligned} (-2-2i)(1+i) &= \sqrt{8}\cdot\sqrt{2}\,\Big(\cos\Big(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\Big) + i\,\sin\Big(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big) \\ &= 4\Big(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\pi}{2}\Big) = -4i. \end{aligned}$$

Beispiel 7

a) Vereinfache iz und $\frac{z}{i}$ wenn $z = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big)$. Gib die Antwort in Polarform an.

Da $i = 1\cdot\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big)$ folgt, dass

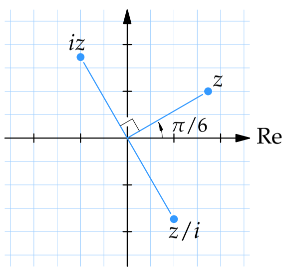
$$\begin{aligned} iz &= 2\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\Big) + i\,\sin\Big(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\Big)\Big) = 2\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\Big), \\ \frac{z}{i} &= 2\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\Big) + i\,\sin\Big(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\Big)\Big) = 2\Big(\cos\frac{-\pi}{3} + i\,\sin\frac{-\pi}{3}\Big). \end{aligned}$$

b) Vereinfache iz und $\frac{z}{i}$, wenn $z = 3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$. Antworte in Polarform.

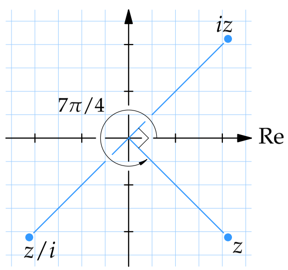
Wir schreiben i in Polarform und erhalten

$$\begin{aligned} iz &= 3\Big(\cos\Big(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\Big) + i\,\sin\Big(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = 3\Big(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\Big) \\ &= 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \\ \frac{z}{i} &= 2\Big(\cos\Big(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\Big) + i\,\sin\Big(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = 2\Big(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\sin\frac{5\pi}{4}\Big). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Multiplikation mit i zu einer Drehung des Winkels $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn führt.



Komplexe Zahlen z, iz und z/i, bei denen $|z| = 2$ und $\arg z = \pi/6$.



Komplexe Zahlen z, iz und z/i, bei denen $|z| = 3$ und $\arg z = 7\pi/4$.

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

3.2 Übungen

Übung 3.2:1

Zeichne mit den komplexen Zahlen $z = 2+i$, $w = 2+3i$ und $u = -1-2i$ folgende Zahlen in der komplexen Zahlenebene:

a) z und w b) $z+u$ und $z-u$

c) $2z+w$ d) $z-\overline{w}+u$

Übung 3.2:2

Zeichne folgende Flächen in der komplexen Zahlenebene:

a) $0 \le \operatorname{Im} z \le 3$ b) $0 \le \operatorname{Re} z \le \operatorname{Im} z \le 3$

c) $|z| = 2$ d) $|z-1-i| = 3$

e) $\operatorname{Re} z = i + \overline{z}$ f) $2 < |z-i| \le 3$

Übung 3.2:3

Die komplexen Zahlen $1+i$, $3+2i$ und $3i$ sind drei Ecken in einem Quadrat in der komplexen Zahlenebene. Finde die vierte Ecke.

Übung 3.2:4

Bestimme den Betrag von:

a) $3+4i$ b) $(2-i)+(5+3i)$

c) $(3-4i)(3+2i)$ d) $\dfrac{3-4i}{3+2i}$

Übung 3.2:5

Bestimme das Argument von:

a) -10 b) $-2+2i$

c) $(\sqrt{3}+i)(1-i)$ d) $\dfrac{i}{1+i}$

Übung 3.2:6

Schreibe die folgenden Zahlen in Polarform:

a) 3 b) $-11i$

c) $-4-4i$ d) $\sqrt{10}+\sqrt{30}\,i$

e) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ f) $\dfrac{(2+2i)(1+i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12}-2i)}$

3.3 Potenzen und Wurzeln

Inhalt:

- Der Moivresche Satz
- Quadratische Gleichungen
- Exponentialfunktionen
- Quadratische Ergänzung

Lernziele:
Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes wissen:

- Wie man Potenzen von komplexen Zahlen mit dem Moivreschen Satz löst.
- Wie man Wurzeln von komplexen Zahlen berechnet, indem man die Zahl in Polarform bringt.
- Wie man komplexe quadratische Ausdrücke quadratisch ergänzt.
- Wie man komplexe quadratische Gleichungen löst.

A - Moivrescher Satz

Die Rechenregeln $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ und $|zw| = |z|\,|w|$ bedeuten, dass

$$\begin{cases} \arg(z \cdot z) = \arg z + \arg z \\ |z \cdot z| = |z| \cdot |z| \end{cases} \qquad \begin{cases} \arg z^3 = 3 \arg z \\ |z^3| = |z|^3 \end{cases} \qquad \text{etc.}$$

Für eine beliebige komplexe Zahl $z = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$ gilt daher, dass

$$z^n = \big(r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\big)^n = r^n\,(\cos n\alpha + i\,\sin n\alpha).$$

Falls $|z| = 1$ (also, dass z am Einheitskreis liegt), erhalten wir den Sonderfall

$$(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\,\sin n\alpha.$$

Diese Regel nennt man den *Moivreschen Satz*. Wie wir sehen werden, ist diese Regel sehr wichtig, wenn man Potenzen und Wurzeln von komplexen Zahlen berechnet.

Beispiel 1

Bestimme z^3 und z^{100} für $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Wir schreiben z in Polarform

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

und verwenden den Moivreschen Satz

$$\begin{aligned} z^3 &= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)^3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \\ z^{100} &= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100} = \cos\frac{100\pi}{4} + i\,\sin\frac{100\pi}{4} \\ &= \cos 25\pi + i\,\sin 25\pi = \cos\pi + i\,\sin\pi = -1. \end{aligned}$$

Beispiel 2
Mit der binomischen Formel können wir den Ausdruck wie folgt erläutern:

$$\begin{aligned} (\cos v + i\,\sin v)^2 &= \cos^2 v + i^2\sin^2 v + 2i\,\sin v\,\cos v \\ &= \cos^2 v - \sin^2 v + 2i\,\sin v\,\cos v \end{aligned}$$

aber wir können auch den Moivreschen Satz benutzen. Dann erhalten wir:

$$(\cos v + i\,\sin v)^2 = \cos 2v + i\,\sin 2v.$$

Da die beiden Ausdrücke gleich sind, erhalten wir, indem wir die Real- und Imaginärteile gleichsetzen, die bekannten trigonometrischen Identitäten

$$\begin{cases} \cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v, \\ \sin 2v = 2\,\sin v\,\cos v. \end{cases}$$

Beispiel 3

Vereinfache $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{14}}{(1+i\sqrt{3})^7(1+i)^{10}}$.

Wir schreiben die Zahlen $\sqrt{3}+i$, $1+i\sqrt{3}$ und $1+i$ in Polarform

- $\sqrt{3}+i = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\Big)$,
- $1+i\sqrt{3} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\Big)$,
- $1+i = \sqrt{2}\,\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\Big)$.

Nach dem Moivreschen Satz erhalten wir

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{14}}{(1+i\sqrt{3})^7(1+i)^{10}} = \frac{2^{14}\Big(\cos\frac{14\pi}{6} + i\,\sin\frac{14\pi}{6}\Big)}{2^7\Big(\cos\frac{7\pi}{3} + i\,\sin\frac{7\pi}{3}\Big)\cdot(\sqrt{2})^{10}\Big(\cos\frac{10\pi}{4} + i\,\sin\frac{10\pi}{4}\Big)}.$$

Diesen Ausdruck können wir weiter vereinfachen, indem wir die Multiplikations- und Divisionsregeln für komplexe Zahlen in Polarform verwenden,

$$\begin{aligned}\frac{2^{14}\Big(\cos\frac{14\pi}{6} + i\,\sin\frac{14\pi}{6}\Big)}{2^{12}\Big(\cos\frac{29\pi}{6} + i\,\sin\frac{29\pi}{6}\Big)} &= 2^2\Big(\cos\Big(-\frac{15\pi}{6}\Big) + i\,\sin\Big(-\frac{15\pi}{6}\Big)\Big)\\ &= 4\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + i\,\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = -4i.\end{aligned}$$

B - Die *n*te Wurzel von komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl z wird die $n$te Wurzel von w genannt, falls

$$z^n = w.$$

Die Lösungen dieser Wurzelgleichung erhält man, indem man beide Zahlen in Polarform bringt und deren Betrag und Argument vergleicht.

Ist eine Zahl $w = |\,w\,|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ gegeben, nimmt man an, dass $z = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$ und erhält so die Gleichung

$$r^n\,(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = |w|\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$

wo wir den Moivreschen Satz auf der linken Seite angewendet haben. Vergleichen wir das Argument und den Betrag der beiden Seiten, erhalten wir

$$\begin{cases} r^n = |w|, \\ n\alpha = \theta + k\cdot 2\pi. \end{cases}$$

Beachte hier, dass wir ein Vielfaches von 2π zum Argument addiert haben, um alle Lösungen zu erhalten,

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{|w|}, \\ \alpha = (\theta + 2k\pi)/n, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Wir erhalten also *einen* Wert für r, aber unendlich viele Werte für α. Trotzdem gibt es nicht unendlich viele Lösungen dieser Gleichung. Für Werte von k zwischen $k = 0$ und $k = n-1$ erhalten wir verschiedene Argumente für z und daher verschiedene Zahlen z. Für andere Werte von k wiederholen wir nur die schon bekannten Lösungen, da die Funktionen $\cos\theta$ und $\sin\theta$ periodisch sind und die Periodenlänge 2π haben. Also hat eine Gleichung mit der Form $z^n = w$ genau n Wurzeln.

Hinweis: Beachte, dass die Argumente der Lösungen sich immer um $2\pi/n$ unterscheiden. Also sind die Lösungen gleichförmig auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{|w|}$ verteilt und bilden ein n-seitiges Polygon.

Beispiel 4

Löse die Gleichung $z^4 = 16\,i$.

Wir schreiben z und $16\,i$ in Polarform

- $z = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$,
- $16\,i = 16\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}\Big)$.

Die Gleichung $z^4 = 16\,i$ wird also

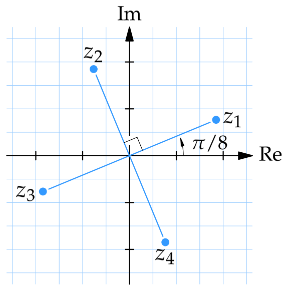
$$r^4\,(\cos 4\alpha + i\,\sin 4\alpha) = 16\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}\Big).$$

Vergleichen wir das Argument und den Betrag der beiden Seiten, erhalten wir

$$\begin{cases} r^4 = 16, \\ 4\alpha = \pi/2 + k\cdot 2\pi, \end{cases} \quad \text{d.h.} \quad \begin{cases} r = \sqrt[4]{16} = 2, \\ \alpha = \pi/8 + k\pi/2, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

Die Wurzeln der Gleichung sind daher

$$\begin{cases} z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\sin\frac{\pi}{8}\right), \\ z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\,\sin\frac{5\pi}{8}\right), \\ z_3 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\,\sin\frac{9\pi}{8}\right), \\ z_4 = 2\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\,\sin\frac{13\pi}{8}\right). \end{cases}$$



C - Exponentialform der komplexen Zahlen

Wenn wir i als eine normale Zahl betrachten und die komplexe Zahl z wie eine Funktion von nur α betrachten (in der r also konstant ist), ergibt sich

$$f(\alpha) = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$$

und wir erhalten durch wiederholte Ableitung

$$f'(\alpha) = -r\sin\alpha + r\,i\,\cos\alpha = r\,i^2\sin\alpha + r\,i\,\cos\alpha = i\,r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) = i\,f(\alpha)$$
$$f''(\alpha) = -r\,\cos\alpha - r\,i\,\sin\alpha = i^2\,r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) = i^2\,f(\alpha)$$
etc.

Die einzigen reellen Funktionen, die dies erfüllen, sind Funktionen in der Form $f(x) = e^{kx}$. Daher stammt folgende Definition:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\sin\alpha.$$

Dies ist auch eine Verallgemeinerung der reellen Exponentialfunktion für komplexe Zahlen. Ersetzen wir $z = a + ib$ erhalten wir

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\,\sin b).$$

Die Definition von e^z kann wie eine Kurzform der Polarform verwendet werden, da $z = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) = r\,e^{i\alpha}$.

Beispiel 5

Für eine reelle Zahl z ist die Definition dieselbe wie für die reelle Exponentialfunktion. Da $z = a + 0 \cdot i$ erhalten wir

$$e^z = e^{a+0\cdot i} = e^a(\cos 0 + i\sin 0) = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Beispiel 6

Eine weitere Folgerung aus dieser Definition erhalten wir durch den Moivreschen Satz,

$$\left(e^{i\alpha}\right)^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha = e^{in\alpha}.$$

Das erinnert uns an die wohlbekannte Rechenregel für Potenzen,

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Beispiel 7

Mit den Definitionen oben erhalten wir die Formel

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Diese berühmte Formel wurde von Euler zu Beginn des 18. Jahrhunderts entdeckt.

Beispiel 8

Löse die Gleichung $(z+i)^3 = -8i$.

Wir lassen $w = z + i$ sein. Wir erhalten so die Gleichung $w^3 = -8i$. Wir bringen als ersten Schritt w und $-8i$ in Polarform

- $w = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) = r\,e^{i\alpha}$,
- $-8i = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 8\,e^{3\pi i/2}$.

In Polarform lautet die Gleichung $r^3e^{3\alpha i} = 8\,e^{3\pi i/2}$. Vergleichen wir das Argument und den Betrag der rechten und linken Seite, erhalten wir

$$\begin{cases} r^3 = 8, \\ 3\alpha = 3\pi/2 + 2k\pi, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt[3]{8}, \\ \alpha = \pi/2 + 2k\pi/3, \quad k = 0,1,2. \end{cases}$$

Die Wurzeln der Gleichung sind daher

- $w_1 = 2\,e^{\pi i/2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$,
- $w_2 = 2\,e^{7\pi i/6} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$,
- $w_3 = 2\,e^{11\pi i/6} = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$,

also sind $z_1 = 2i - i = i$, $z_2 = -\sqrt{3} - 2i$ und $z_3 = \sqrt{3} - 2i$.

Beispiel 9

Löse die Gleichung $z^2 = \overline{z}$.

Wenn für $z = a + ib$, $|z| = r$ und $\arg z = \alpha$ ist, ist für $\overline{z} = a - ib$, $|\overline{z}| = r$ und $\arg \overline{z} = -\alpha$. Also ist $z = r\,e^{i\alpha}$ und $\overline{z} = r\,e^{-i\alpha}$. Die Gleichung lautet also

$$(r\,e^{i\alpha})^2 = r\,e^{-i\alpha} \qquad \text{oder} \qquad r^2 e^{2i\alpha} = r\,e^{-i\alpha},$$

Wir sehen direkt, dass $r = 0$ eine der Lösungen ist und daher die Lösung $z = 0$ ergibt. Nehmen wir an, dass $r \neq 0$ erhalten wir die Gleichung $r\,e^{3i\alpha} = 1$. Vergleichen wir hier Betrag und Argument, erhalten wir

$$\begin{cases} r = 1, \\ 3\alpha = 0 + 2k\pi, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 1, \\ \alpha = 2k\pi/3, \quad k = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Die Wurzeln sind also

- $z_1 = e^0 = 1,$
- $z_2 = e^{2\pi i/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i,$
- $z_3 = e^{4\pi i/3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i,$
- $z_4 = 0.$

D - Quadratische Ergänzung

Die wohlbekannten Regeln

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

können auch verwendet werden, um quadratische Ausdrücke zu vereinfachen, zum Beispiel

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2,$$
$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2.$$

Dies kann verwendet werden, um quadratische Gleichungen zu lösen, zum Beispiel

$$x^2 + 4x + 4 = 9,$$
$$(x+2)^2 = 9.$$

Indem wir die Wurzeln berechnen, erhalten wir, dass $x + 2 = \pm\sqrt{9}$ und, dass $x = -2 \pm 3$ und daher $x = 1$ oder $x = -5$.

Manchmal muss man eine Konstante addieren oder subtrahieren, um eine der binomischen Formeln umgekehrt verwenden zu können. Zum Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Addieren wir 9 zu beiden Seiten, erhalten wir eine passende quadratische Form

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 5 + 9 &= 0 + 9, \\ x^2 + 4x + 4 &= 9. \end{aligned}$$

Diese Methode, quadratische Gleichungen zu lösen, nennt man *quadratische Ergänzung*.

Beispiel 10

a) Löse die Gleichung $x^2 - 6x + 7 = 2$.

Der Koeffizient von x ist -6 und daher müssen wir die Zahl $(-3)^2 = 9$ als Konstante haben, um die quadratische Ergänzung verwenden zu können. Indem wir 2 auf beiden Seiten addieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 7 + 2 &= 2 + 2, \\ x^2 - 6x + 9 &= 4, \\ (x-3)^2 &= 4. \end{aligned}$$

Wir erhalten also $x - 3 = \pm 2$. Daher ist $x = 1$ oder $x = 5$.

b) Löse die Gleichung $z^2 + 21 = 4 - 8z$.

Die Gleichung kann wie $z^2 + 8z + 17 = 0$ geschrieben werden. Indem wir 1 von beiden Seiten subtrahieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} z^2 + 8z + 17 - 1 &= 0 - 1, \\ z^2 + 8z + 16 &= -1, \\ (z+4)^2 &= -1, \end{aligned}$$

und daher ist $z + 4 = \pm\sqrt{-1}$. Also sind die Wurzeln $z = -4 - i$ und $z = -4 + i$.

Im Allgemeinen addiert oder subtrahiert man eine Konstante, sodass die Konstante auf der linken Seite der Gleichung das Quadrat des halben Koeffizienten des x-Terms ist. Diese Methode funktioniert auch für komplexe Gleichungen.

Beispiel 11
Löse die Gleichung $x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 2$.

Der halbe Koeffizient von x ist $-\frac{4}{3}$. Also müssen wir $\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ auf beiden Seiten addieren

$$\begin{aligned} x^2 - \tfrac{8}{3}x + \tfrac{16}{9} + 1 &= 2 + \tfrac{16}{9}, \\ \left(x - \tfrac{4}{3}\right)^2 + 1 &= \tfrac{34}{9}, \\ \left(x - \tfrac{4}{3}\right)^2 &= \tfrac{25}{9}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $x - \frac{4}{3} = \pm\frac{5}{3}$ und erhalten dadurch, dass $x = \frac{4}{3} \pm \frac{5}{3}$, also $x = -\frac{1}{3}$ oder $x = 3$.

Beispiel 12
Löse die Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= \left(\frac{p}{2}\right)^2, \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q, \\ x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir eine allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Beispiel 13
Löse die Gleichung $z^2 - (12+4i)z - 4 + 24i = 0$.

Der halbe Koeffizient von z ist $-(6+2i)$. Daher addieren wir das Quadrat des Koeffizienten auf beiden Seiten der Gleichung

$$z^2 - (12+4i)z + (-(6+2i))^2 - 4 + 24i = (-(6+2i))^2.$$

Erweitern wir die rechte Seite $(-(6+2i))^2 = 36 + 24i + 4i^2 = 32 + 24i$ und ergänzen die linke Seite quadratisch, erhalten wir

$$\begin{aligned} (z - (6+2i))^2 - 4 + 24i &= 32 + 24i, \\ (z - (6+2i))^2 &= 36. \end{aligned}$$

Wir erhalten $z - (6+2i) = \pm 6$ und daher die Wurzeln $z = 12 + 2i$ und $z = 2i$.

Man kann auch einen Ausdruck quadratisch ergänzen, indem man dieselbe Konstante vom Ausdruck subtrahiert und addiert. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 3 &= x^2 + 10x + 25 + 3 - 25 \\ &= (x+5)^2 - 22. \end{aligned}$$

Beispiel 14
Ergänze $z^2 + (2-4i)z + 1 - 3i$ quadratisch.

Wir subtrahieren und addieren $\left(\frac{1}{2}(2-4i)\right)^2 = (1-2i)^2 = -3 - 4i$ vom Ausdruck,

$$\begin{aligned} z^2 + (2-4i)z + 1 - 3i &= z^2 + (2-4i)z + (1-2i)^2 - (1-2i)^2 + 1 - 3i \\ &= \big(z + (1-2i)\big)^2 - (1-2i)^2 + 1 - 3i \\ &= \big(z + (1-2i)\big)^2 - (-3-4i) + 1 - 3i \\ &= \big(z + (1-2i)\big)^2 + 4 + i. \end{aligned}$$

E - Lösungen mit der allgemeinen Lösungsformel

Manchmal ist es am einfachsten, quadratische Gleichungen mit der allgemeinen Lösungsformel zu lösen. Bei komplexen Gleichungen können dann aber Terme wie $\sqrt{a+ib}$ entstehen. Man kann dann annehmen, dass

$$z = x + iy = \sqrt{a+ib}.$$

Quadrieren wir beide Seiten, erhalten wir

$$\begin{aligned} (x+iy)^2 &= a + ib, \\ x^2 - y^2 + 2xy\,i &= a + ib. \end{aligned}$$

Indem wir den Real- und Imaginärteil vergleichen, erhalten wir

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Diese Gleichungen löst man zum Beispiel, indem man $y = b/(2x)$ in der ersten Gleichung ersetzt.

Beispiel 15

Berechne $\sqrt{-3-4i}$.

Wir nehmen an, dass $x + iy = \sqrt{-3-4i}$, wobei x und y reelle Zahlen sind. Quadrieren wir beide Seiten, erhalten wir

$$\begin{aligned}(x+iy)^2 &= -3-4i,\\ x^2 - y^2 + 2xyi &= -3-4i,\end{aligned}$$

und wir erhalten die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ \quad 2xy = -4. \end{cases}$$

Von der zweiten Gleichung erhalten wir $y = -4/(2x) = -2/x$. Das in der ersten Gleichung substituiert, ergibt

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für x^2, die wir am einfachsten lösen, indem wir $t = x^2$ substituieren,

$$t^2 + 3t - 4 = 0.$$

Die Lösungen sind $t = 1$ und $t = -4$. Die letzte Lösung ist nicht gültig, da x und y reell sein müssen (nach unserer Annahme). Wir erhalten also die Lösungen $x = \pm\sqrt{1}$ und dadurch

- $x = -1$ ergibt, dass $y = -2/(-1) = 2$,
- $x = 1$ ergibt, dass $y = -2/1 = -2$.

Also ist

$$\sqrt{-3-4i} = \begin{cases} 1 - 2i, \\ -1 + 2i. \end{cases}$$

Beispiel 16

a) Löse die Gleichung $z^2 - 2z + 10 = 0$.

Wir erhalten durch die allgemeine Lösungsformel (siehe Beispiel 12)

$$z = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3i.$$

b) Löse die Gleichung $z^2 + (4-2i)z - 4i = 0$.

Wir verwenden wieder die Lösungsformel und erhalten

$$\begin{aligned} z &= -2 + i \pm \sqrt{(-2+i)^2 + 4i} = -2 + i \pm \sqrt{4 - 4i + i^2 + 4i} \\ &= -2 + i \pm \sqrt{3} = -2 \pm \sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

c) Löse die Gleichung $iz^2 + (2+6i)z + 2 + 11i = 0$.

Division auf beiden Seiten durch i ergibt

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{2+6i}{i}z + \frac{2+11i}{i} &= 0, \\ z^2 + (6-2i)z + 11 - 2i &= 0. \end{aligned}$$

Durch die Lösungsformel erhalten wir

$$\begin{aligned} z &= -3 + i \pm \sqrt{(-3+i)^2 - (11-2i)} \\ &= -3 + i \pm \sqrt{-3-4i} \\ &= -3 + i \pm (1-2i), \end{aligned}$$

indem wir das Beispiel 15 verwenden, um $\sqrt{-3-4i}$ zu erhalten. Die Lösungen sind daher

$$z = \begin{cases} -2 - i, \\ -4 + 3i. \end{cases}$$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

3.3 Übungen

Übung 3.3:1

Bringe folgende komplexe Zahlen in die Form $a+ib$, wobei a und b reelle Zahlen sind.

a) $(i+1)^{12}$ b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$

c) $(4\sqrt{3}-4i)^{22}$ d) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$

e) $\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)^8}{(\sqrt{3}-i)^9}$

Übung 3.3:2

Löse die Gleichungen.

a) $z^4=1$ b) $z^3=-1$ c) $z^5=-1-i$

d) $(z-1)^4+4=0$ e) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2=-1$

Übung 3.3:3

Ergänze folgende Ausdrücke quadratisch.

a) z^2+2z+3 b) $z^2+3iz-\frac{1}{4}$

c) $-z^2-2iz+4z+1$ d) $iz^2+(2+3i)z-1$

Übung 3.3:4

Löse die Gleichungen.

a) $z^2=i$ b) $z^2-4z+5=0$

c) $-z^2+2z+3=0$ d) $\frac{1}{z}+z=\frac{1}{2}$

Übung 3.3:5

Löse die Gleichungen.

a) $z^2-2(1+i)z+2i-1=0$ b) $z^2-(2-i)z+(3-i)=0$

c) $z^2-(1+3i)z-4+3i=0$ d) $(4+i)z^2+(1-21i)z=17$

Übung 3.3:6

Bestimme die Wurzeln von $z^2=1+i$ in Polarform und in der Form $a+ib$, wobei a und b reelle Zahlen sind. Verwenden sie das Ergebnis, um $\tan(\pi/8)$ zu berechnen.

3.4 Komplexe Polynome

Inhalt:

- Polynomdivision
- Fundamentalsatz der Algebra

Lernziele:

Nach diesem Abschnitt solltest Du folgendes wissen:

- Wie man die Polynomdivision ausführt.
- In welchem Verhältnis die Faktoren und Nullstellen eines Polynomes stehen.
- Ein Polynom mit Grad n hat n Nullstellen.
- Polynome mit reellen Koeffizienten haben konjugiert komplexe Nullstellen.

A - Polynome

Ausdrücke in der Form

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

wobei n eine ganze Zahl ist, nennt man *Polynome* vom Grad n und der Variable x. Die Zahl a_1 ist der Koeffizient von x, a_2 ist der Koeffizient von x^2, etc. Die Zahl a_0 ist die Konstante des Polynoms.

Polynome haben mit den ganzen Zahlen viele Eigenschaften gemein und sind deshalb in der Mathematik höchst interessant.

Beispiel 1

Vergleiche folgende Zahl in der Basis 10

$$1353=1\cdot 10^3+3\cdot 10^2+5\cdot 10+3$$

mit dem Polynom $p(x)$,

$$x^3+3x^2+5x+3=1\cdot x^3+3\cdot x^2+5\cdot x+3,$$

und dann den folgenden Divisionen

- $\dfrac{1353}{11} = 123 \qquad \text{da } 1353 = 123 \cdot 11\,,$
- $\dfrac{x^3+3x^2+5x+3}{x+1} = x^2+2x+3 \qquad \text{da } x^3+3x^2+5x+3 = (x^2+2x+3)(x+1)\,.$

Wenn $p(x)$ ein Polynom vom Grad n ist, ist $p(x) = 0$ eine *Polynomgleichung* vom Grad n. Falls $p(a) = 0$ für die Zahl $x = a$, nennt man $x = a$ eine *Wurzel* oder Lösung der Gleichung. Man sagt auch, dass $x = a$ eine Nullstelle von $p(x)$ ist.

Das Beispiel zeigt, dass Polynome wie ganze Zahlen dividiert werden können. Meistens erhält man nach einer Polynomdivision nicht ein ganzes Polynom. Es ist wie bei den ganzen Zahlen, zum Beispiel

$$\frac{37}{5} = \frac{35+2}{5} = 7 + \frac{2}{5}.$$

Man kann auch schreiben, dass $37 = 7 \cdot 5 + 2$. Die Zahl 7 wird *Quotient* genannt, und die Zahl 2 wird der *Rest* genannt. Man sagt, dass die Division von 37 durch 5 den Quotienten 7 und den Rest 2 ergibt.

Gleichermassen gilt, dass wenn $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind, kann man $p(x)$ durch $q(x)$ dividieren und die Polynome $k(x)$ und $r(x)$ bestimmen, sodass

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

oder $p(x) = k(x)\,q(x) + r(x)$. Man sagt hier, dass $k(x)$ der Quotient ist, und $r(x)$ der Rest.

Falls der Rest null wird, also wenn $r(x) = 0$, sagt man, dass $p(x)$ durch $q(x)$ teilbar ist oder, dass $q(x)$ ein *Teiler* von $p(x)$ ist. Man Schreibt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x),$$

oder $p(x) = k(x)\,q(x)$.

B - Polynomdivision

Wenn $p(x)$ einen Grad hat, der höher als der Grad von $q(x)$ ist, kann man $p(x)$ durch $q(x)$ teilen. Dies kann man zum Beispiel machen, indem man Vielfache von $q(x)$ von $p(x)$ abzieht bis der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners $q(x)$ ist.

Beispiel 2

Berechne $\dfrac{x^3+x^2-x+4}{x+2}$ durch Polynomdivision.

Der erster Schritt ist, dass wir einen passenden x^2-Term zum Zähler *addieren und subtrahieren*,

$$\frac{x^3+x^2-x+4}{x+2} = \frac{x^3+2x^2-2x^2+x^2-x+4}{x+2}.$$

Jetzt ist es offenbar, dass x^3+2x^2 als $x^2(x+2)$ geschrieben werden kann und, dass wir den Faktor $(x+2)$ kürzen können,

$$\frac{x^2(x+2)-2x^2+x^2-x+4}{x+2} = x^2 + \frac{-x^2-x+4}{x+2}.$$

Jetzt addieren und subtrahieren wir einen passenden x-Term vom Zähler, sodass wir den x^2-Term beseitigen,

$$x^2 + \frac{-x^2-2x+2x-x+4}{x+2} = x^2 + \frac{-x(x+2)+2x-x+4}{x+2} = x^2 - x + \frac{x+4}{x+2}.$$

Im letzten Schritt addieren und subtrahieren wir eine Konstante zum/vom Zähler,

$$x^2 - x + \frac{x+4}{x+2} = x^2 - x + \frac{x+2-2+4}{x+2} = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x+2},$$

und wir erhalten

$$\frac{x^3+x^2-x+4}{x+2} = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x+2}.$$

Der Quotient ist also $x^2 - x + 1$ und der Rest ist 2. Da der Rest nicht null ist, ist $q(x) = x+2$ nicht ein Teiler von $p(x) = x^3+x^2-x+4$.

C - Das Verhältnis zwischen Faktoren und Nullstellen

Wenn $q(x)$ ein Teiler von $p(x)$ ist, ist $p(x) = k(x)\,q(x)$. Wir haben $p(x)$ also *faktorisiert*. Man sagt, dass $q(x)$ ein Faktor von $p(x)$ ist. Besonders wenn ein Polynom $(x-a)$ mit dem Grad 1 ein Teiler von $p(x)$ ist, dann ist $(x-a)$ ein Faktor von $p(x)$, also

$$p(x) = q(x) \cdot (x-a).$$

Da $p(a) = q(a)\,(a-a) = q(a) \cdot 0 = 0$, bedeutet dies, dass $x = a$ eine Nullstelle von $p(x)$ ist.

$(x-a)$ ist ein Teiler vom Polynom $p(x)$ genau dann, wenn $x=a$ eine Nullstelle von $p(x)$ ist.

Beachten Sie, dass dieser Satz in beide Richtungen gilt. Wenn wir wissen, dass $x=a$ eine Nullstelle von $p(x)$ ist, wissen wir also auch, dass $p(x)$ durch $(x-a)$ teilbar ist.

Beispiel 3

Das Polynom $p(x)=x^2-6x+8$ kann so

$$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$$

in Faktoren zerlegt werden und hat daher die Nullstellen $x=2$ und $x=4$ (und keine anderen Nullstellen). Dies sind genau die Nullstellen, die wir erhalten, wenn wir die Gleichung $x^2-6x+8=0$ lösen.

Beispiel 4

a) Zerlege das Polynom $x^2-3x-10$ in seine Faktoren.

Indem wir die Nullstellen des Polynoms bestimmen, erhalten wir auch die Faktoren. Die quadratische Gleichung $x^2-3x-10=0$ hat die Lösungen

$$x=\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2-(-10)}=\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{7}{2},$$

also $x=-2$ und $x=5$. Daher ist $x^2-3x-10=(x-(-2))(x-5)=(x+2)(x-5)$.

b) Zerlege das Polynom x^2+6x+9 in seine Faktoren.

Dieses Polynom hat eine doppelte Nullstelle

$$x=-3\pm\sqrt{(-3)^2-9}=-3$$

und daher ist $x^2+6x+9=(x-(-3))(x-(-3))=(x+3)^2$.

c) Zerlege das Polynom x^2-4x+5 in seine Faktoren.

Dieses Polynom hat zwei komplexe Wurzeln

$$x=2\pm\sqrt{2^2-5}=2\pm\sqrt{-1}=2\pm i$$

und die Faktoren sind daher $(x-(2-i))(x-(2+i))$.

Beispiel 5

Bestimme ein kubisches Polynom mit den Nullstellen 1, -1 und 3.

Das Polynom hat die Faktoren $(x-1)$, $(x+1)$ und $(x-3)$. Multiplizieren wir diese Faktoren, erhalten wir das gesuchte Polynom

$$(x-1)(x+1)(x-3)=(x^2-1)(x-3)=x^3-3x^2-x+3.$$

D - Fundamentalsatz der Algebra

Am Anfang dieses Abschnittes haben wir die komplexen Zahlen eingeführt, um quadratische Gleichungen wie $x^2=-1$ zu lösen. Wir können uns fragen, ob man mit den komplexen Zahlen alle Polynomgleichungen lösen kann oder, ob man dazu andere Zahlen als die komplexen benötigt. Die Antwort ist, dass die komplexen Zahlen ausreichen. Der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauss bewies im Jahr 1799 den *Fundamentalsatz der Algebra*:

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom mit dem Grad $n\geq 1$ und komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Da aber jede Nullstelle einem Faktor im Polynom entspricht, können wir das Gesetz erweitern:

Jedes Polynom mit dem Grad $n\geq 1$ hat genau n Nullstellen, wenn man jede Nullstelle mit seiner Multiplizität rechnet.

(Multiplizität bedeutet, dass eine doppelte Nullstelle zweimal zählt, eine dreifache Nullstelle dreimal, etc.)

Beachten Sie, dass der Satz nur sagt, dass komplexe Nullstellen existieren und nicht, wie man sie findet. Im Allgemeinen ist es sehr schwierig, die Nullstellen eines Polynomes zu finden. Wenn man die Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten sucht, hilft uns das Wissen, dass die Nullstellen immer in konjugiert komplexen Paaren auftreten.

Beispiel 6

Zeige, dass das Polynom $p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ die Nullstellen $x = i$ und $x = 2 - i$ hat. Bestimme damit alle Nullstellen.

Gegeben ist

$$\begin{aligned} p(i) &= i^4 - 4i^3 + 6i^2 - 4i + 5 = 1 + 4i - 6 - 4i + 5 = 0, \\ p(2-i) &= (2-i)^4 - 4(2-i)^3 + 6(2-i)^2 - 4(2-i) + 5. \end{aligned}$$

Um den letzten Ausdruck zu berechnen, müssen wir die Quadrate berechnen:

$$\begin{aligned} (2-i)^2 &= 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i, \\ (2-i)^3 &= (3-4i)(2-i) = 6 - 3i - 8i + 4i^2 = 2 - 11i, \\ (2-i)^4 &= (2-11i)(2-i) = 4 - 2i - 22i + 11i^2 = -7 - 24i. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} p(2-i) &= -7 - 24i - 4(2-11i) + 6(3-4i) - 4(2-i) + 5 \\ &= -7 - 24i - 8 + 44i + 18 - 24i - 8 + 4i + 5 = 0, \end{aligned}$$

und daher sind i und $2 - i$ Nullstellen des Polynoms.

Da das Polynom reelle Koeffizienten hat, können wir direkt sagen, dass die anderen Nullstellen die konjugiert komplexen Nullstellen sind, also $z = -i$ und $z = 2 + i$.

Eine Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra ist, dass alle Polynome in lineare komplexe Faktoren zerlegt werden können. Dies gilt natürlich auch für Polynome mit reellen Koeffizienten, nur können wir dann die konjugiert komplexen Faktoren zu reellen quadratischen Faktoren multiplizieren. Das Polynom wird in diesem Fall aus linearen und quadratischen Faktoren bestehen.

Beispiel 7

Zeige, dass $x = 1$ eine Nullstelle von $p(x) = x^3 + x^2 - 2$ ist. Zerlegen Sie danach $p(x)$ in reelle Polynome und zerlegen sie dann $p(x)$ in lineare Faktoren.

Da $p(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 0$, ist $x = 1$ eine Nullstelle des Polynoms. Laut dem Fundamentalsatz der Algebra ist daher $x - 1$ ein Faktor von $p(x)$, also ist $p(x)$

durch $x - 1$ teilbar. Wir teilen daher $p(x)$ durch $x - 1$,

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1} &= \frac{x^2(x-1) + 2x^2 - 2}{x - 1} = x^2 + \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = x^2 + \frac{2x(x-1) + 2x - 2}{x - 1} \\ &= x^2 + 2x + \frac{2x - 2}{x - 1} = x^2 + 2x + \frac{2(x-1)}{x - 1} = x^2 + 2x + 2. \end{aligned}$$

Also ist $p(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$. Das ist die Antwort auf die erste Frage.

Jetzt müssen wir nur noch $x^2 + 2x + 2$ in seine Faktoren zerlegen. Die Gleichung $x^2 + 2x + 2 = 0$ hat die Lösungen

$$x = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$$

und daher hat das Polynom die komplexen linearen Faktoren,

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2) &= (x-1)(x - (-1+i))(x - (-1-i)) \\ &= (x-1)(x + 1 - i)(x + 1 + i). \end{aligned}$$

Noch Fragen zu diesem Kapitel? Dann schau nach im Kursforum (Du findest den Link in der Student Lounge) oder frag nach per Skype bei ombTutor.

3.4 Übungen

Übung 3.4:1

Berechne folgende Ausdrücke durch Polynomdivision. (Manche Ausdrücke haben auch einen Rest.)

a) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $\dfrac{x^2}{x+1}$ c) $\dfrac{x^3+a^3}{x+a}$

d) $\dfrac{x^3+x+2}{x+1}$ e) $\dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2+3x+1}$

Übung 3.4:2

Die Gleichung $z^3-3z^2+4z-2=0$ hat die eine Wurzel $z=1$. Bestimme die restlichen Wurzeln.

Übung 3.4:3

Die Gleichung $z^4+2z^3+6z^2+8z+8=0$ hat die Wurzeln $z=2i$ und $z=-1-i$. Löse die Gleichung.

Übung 3.4:4

Bestimme die reellen Zahlen a und b, sodass die Gleichung $z^3+az+b=0$ die Wurzel $z=1-2i$ hat. Löse danach die Gleichung.

Übung 3.4:5

Bestimme a und b, sodass die Gleichung $z^4-6z^2+az+b=0$ eine dreifache Wurzel hat. Löse danach die Gleichung.

Übung 3.4:6

Die Gleichung $z^4+3z^3+z^2+18z-30=0$ hat eine rein imaginäre Wurzel. Bestimme alle Wurzeln.

Übung 3.4:7

Bestimme ein Polynom mit den folgenden Nullstellen.

a) 1, 2 und 4 b) $-1+i$ und $-1-i$

Antworten zu den Aufgaben

Differentialrechnung

1.1:1 a) $f'(-5)>0$ und $f'(1)<0$
b) $x=-3$ und $x=2$
c) $-3<x<2$

1.1:2 a) $f'(x)=2x-3$
b) $f'(x)=-\sin x-\cos x$
c) $f'(x)=e^x-1/x$
d) $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}=1/2\sqrt{x}$
e) $f'(x)=4x(x^2-1)$
f) $f'(x)=-\sin(x+\pi/3)$

1.1:3 14,0 m/s

1.1:4 Die Tangente: $y=2x-1$
Die Normale: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

1.1:5 $(1-\sqrt{2},-3+2\sqrt{2})$ und $(1+\sqrt{2},-3-2\sqrt{2})$

1.2:1 a) $\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$
b) $2x\ln x+x$
c) $\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=1-\dfrac{2}{(x+1)^2}$
d) $\dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}$
e) $\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{(\ln x)^2}$
f) $\dfrac{\ln x+1}{\sin x}-\dfrac{x\ln x\cos x}{\sin^2x}$

1.2:2 a) $\cos x^2\cdot 2x$
b) $e^{x^2+x}(2x+1)$
c) $-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$
d) $\dfrac{1}{x\ln x}$
e) $(2x+1)^3(10x+1)$
f) $\dfrac{\sin\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$

1.2:3 a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$
b) $-\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}\sqrt{x+1}}$
c) $-\dfrac{1-2x^2}{x^2(1-x^2)^{3/2}}$
d) $-\cos\cos\sin x\cdot\sin\sin x\cdot\cos x$
e) $e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x$
f) $x^{\tan x}\left(\dfrac{\ln x}{\cos^2x}+\dfrac{\tan x}{x}\right)$

1.2:4 a) $\dfrac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$
b) $-\dfrac{2\sin\ln x}{x}$

1.3:1 a) Stationäre Stelle: $x=0$
Sattelpunkte: Keine
Lokale Min: $x=0$
Lokale Max: Keine
Globale Min: $x=0$
Globale Max: Keine
Streng mon. steigend: $x\geq 0$
Streng mon. fallend: $x\leq 0$
b) Stationäre Stelle: $x=-1$ und 1
Sattelpunkte: Keine
Lokale Min: $x=-3$ und 1
Lokale Max: $x=-1$ und 2
Globale Min: $x=-3$
Globale Max: $x=-1$
Streng mon. steigend: $[-3,-1]$ und $[1,2]$
Streng mon. fallend: $[-1,1]$
c) Stationäre Stelle: $x=-2,-1,$ und $\frac{1}{2}$
Sattelpunkte: $x=-1$
Lokale Min: $x=-2$ und 2
Lokale Max: $x=-3$ und $\frac{1}{2}$
Globale Min: $x=-2$
Globale Max: $x=-3$
Streng mon. steigend: $[-2,\frac{1}{2}]$
Streng mon. fallend: $[-3,-2]$ und $[\frac{1}{2},2]$

d) Stationäre Stelle: $x = -\frac{5}{2}$ und $\frac{1}{2}$
Sattelpunkte: Keine
Lokale Min: $x = -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$ und 2
Lokale Max: $x = -3, -1,$ und $\frac{1}{2}$
Globale Min: $x = -\frac{5}{2}$
Globale Max: $x = -1$
Streng mon. steigend: $[-\frac{5}{2}, -1]$, $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
Streng mon. fallend: $[-3, -\frac{5}{2}]$, $[-1, -\frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2}, 2]$

1.3:2 a) $x = 1$ (lokale Min)
b) $x = \frac{3}{2}$ (lokale Max)
c) $x = -2$ (lokale Max)
$x = 1$ (lokale Min)
d) keine lokalen Extrema

1.3:3 a) $x = 0$ (lokale Max)
b) $x = -\frac{1}{3}\ln\frac{5}{3}$ (lokale Min)
c) $x = 1/e$ (lokale Min)
d) $x = -\sqrt{\sqrt{2}-1}$ (lokale Max)
$x = 0$ (lokale Min)
$x = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ (lokale Max)
e) $x = -3$ (lokale Min)
$x = -2$ (lokale Max)
$x = 1$ (lokale Min)
$x = 3$ (lokale Max)

1.3:4 $P = (1/\sqrt{3}, 2/3)$

1.3:5 $\alpha = \pi/6$

1.3:6 Radius = Höhe = $\sqrt[3]{V/\pi}$

1.3:7 $2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ radians

Integralrechnung

2.1:1 a) 6 b) 2 c) 2 d) $\frac{5}{2}$

2.1:2 a) $\frac{44}{3}$ b) $-\frac{9}{2}$ c) $\frac{32}{3}$ d) 1

2.1:3 a) $-\cos x + C$ b) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$
c) $\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x} + C$
d) $\frac{1}{2}x^2 + \ln x + C$

2.1:4 a) $(3 - 1/\sqrt{2})$ b) $4\sqrt{3}$
c) 32
d) $\left(\sqrt{2} - 1 - \ln(\sqrt{2} - 1)\right)$
e) $\frac{9}{2}$

2.1:5 a) $\frac{2}{27}\left((x+9)\sqrt{x+9} + x\sqrt{x}\right) + C$
b) $-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$

2.2:1 a) $\frac{13}{1000}$ b) $\frac{1}{12}(x^2+3)^6 + C$
c) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$

2.2:2 a) 0 b) $\frac{1}{2}(e^4 - e^3)$ c) 14 d) $\frac{3}{4}$

2.2:3 a) $-\cos x^2 + C$
b) $\frac{1}{2}\sin^2 x + C$
c) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$
d) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2x + 2\right) + C$
e) $\frac{3}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) + C$
f) $-2\cos\sqrt{x} + C$

2.2:4 a) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$
b) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$
c) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2} + C$
d) $x - \arctan x + C$

2.3:1 a) $-2(x+1)e^{-x} + C$
b) $-(x+1)\cos x + \sin x + C$
c) $2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x + C$
d) $\frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C$

2.3:2 a) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C$ b) $\frac{1}{2}$
c) $-\ln|\cos x| + C$
d) $x(\ln x - 1) + C$

Komplexe Zahlen

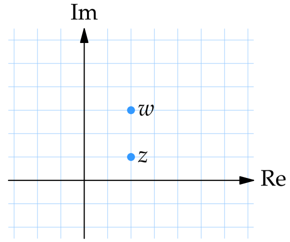
3.1:1 a) $8 + 3i$ b) $-2 + 4i$ c) $-3 + 2i$
d) $31 + i$ e) $7 - i$ f) $1 - i$

3.1:2 a) $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ b) $-\frac{19}{26} + \frac{2}{13}i$
c) $-\frac{11}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{3}i$ d) $\frac{7}{130} - \frac{93}{65}i$

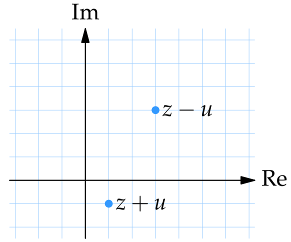
3.1:3 $a = -6$

3.1:4 a) $z = 2 + 3i$ b) $z = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$
c) $z = 2 + i$ d) $z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$
e) $z = \frac{2}{3} - i$ f) $z = 3 + i$

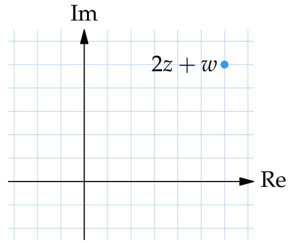
3.2:1 a)



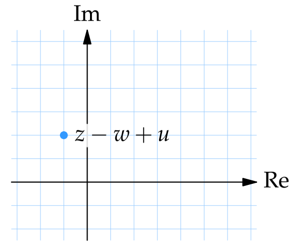
b)



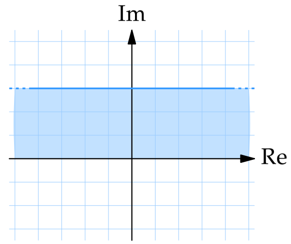
c)



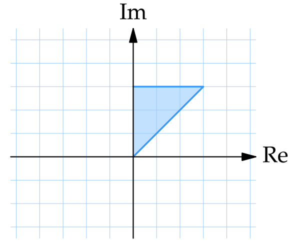
d)



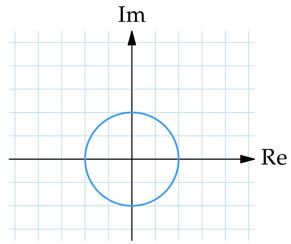
3.2:2 a)



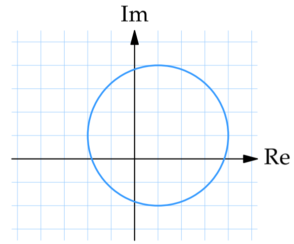
b)

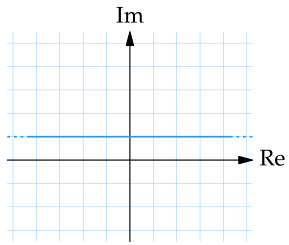


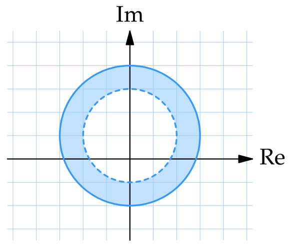
c)



d)



e) 

f) 

3.2:3 $2+4i$

3.2:4 a) 5 b) $\sqrt{53}$ c) $5\sqrt{13}$
d) $5/\sqrt{13}$

3.2:5 a) π b) $\frac{3}{4}\pi$ c) $-\frac{1}{12}\pi$ oder $\frac{23}{12}\pi$
d) $\frac{1}{4}\pi$

3.2:6 a) $3(\cos 0 + i\sin 0)$
b) $11\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$
c) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$
d) $2\sqrt{10}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
e) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
f) $\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

3.3:1 a) -64 b) 1 c) $2^{65}+2^{65}\sqrt{3}\,i$
d) -64 e) $\frac{1}{32}\sqrt{3}-\frac{1}{32}i$

3.3:2 a) $z=\pm 1, \quad z=\pm i$
b) $z=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i, \quad z=-1$
c) $z = 2^{1/10}\exp\left(\frac{\pi i}{4}+\frac{2k\pi i}{5}\right)$ für $k=0,1,2,3,4.$
d) $z=2\pm i, \quad z=\pm i$
e) $z=\pm 1$

3.3:3 a) $(z+1)^2+2$
b) $\left(z+\frac{3}{2}i\right)^2+2$
c) $-(z-2+i)^2+4(1-i)$
d) $i\left(z+\frac{3}{2}-i\right)^2-4-\frac{5}{4}i$

3.3:4 a) $z=\pm(1+i)/\sqrt{2}$ b) $z=2\pm i$
c) $z=-1, \quad z=3$
d) $z=(1\pm i\sqrt{15})/4$

3.3:5 a) $z=2+1, \quad z=i$
b) $z=1+i, \quad z=1-2i$
c) $z=2+i, \quad z=-1+2i$
d) $z=i, \quad z=1+4i$

3.3:6 $$z=\begin{cases}\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)\end{cases} = \begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}+2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}+2}-i\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\end{cases}$$
Ausdruck: $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

3.4:1 a) $x+1$ b) $x-1+\frac{1}{x+1}$
c) x^2-ax+a^2 d) x^2-x+2
e) $x-1+\frac{2x+2}{x^2+3x+1}$

3.4:2 $z=1\pm i$

3.4:3 $z=-1\pm i, \quad z=\pm 2i$

3.4:4 $a=1$ und $b=10$.
Die Lösungen: $z=1\pm 2i, z=-2.$

3.4:5 Zwei Möglichkeiten:
1. $a=8$ und $b=-3$.
Die Lösungen: $z=1$ (dreifache Wurzel), $z=-3$.
2. $a=-8$ und $b=-3$.
Die Lösungen: $z=-1$ (dreifache Wurzel), $z=3$.

3.4:6 $z=\pm i\sqrt{6}, \quad z=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{29}$

3.4:7 a) $(z-1)(z-2)(z-4) = z^3-7z^2+14z-8$
b) $(z+1-i)(z+1+i) = z^2+2z+2$