LÖSNINGAR till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II för F1, D1 och I1, 5B1109, 20 augusti 2001.

1. SVAR: $\frac{83}{65} - \frac{14}{65}i$.

2. Den sökta dimensionen är lika med rangen för en matris vars rader utgörs av de givna vektorerna. Sedvanlig rangberäkning ger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisen A har tydligen rangen 3, så

SVAR: Dimensionen är tre.

3. Matrisen A är inverterbar omm $\det(A) \neq 0$. Vanlig determintberäkning ger att $\det(A) = a^2 + 2a - 2$. Detta polynom har nollställena $a = -2$ och $a = 1$.

SVAR: Matrisen inverterbar för alla a skilda från -2 och 1.

4. Reella koefficienter medför att även $1 + 2i$ är en rot. Polynomet i ekvationens vänsterled delas då av polynomet

$$(z - (1 - 2i))(z - (1 + 2i)) = z^2 - 2z + 5.$$

Divisionsalgoritmen ger

$$z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 24z + 10 = (z^2 - 2z + 5)(z^2 - 4z + 2).$$

Ekvationen $z^2 - 4z + 2 = 0$ löses och vi får

SVAR: $1 \pm 2i$, $2 \pm \sqrt{2}$.

5. Vi kan räkna i tablåform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} I & 2A^{-1} & A^{-1} \\ 3A & I & I \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} I & 2A^{-1} & A^{-1} \\ 0 & -5I & -2I \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} I & 2A^{-1} & A^{-1} \\ 0 & I & 0.4I \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} I & 0 & 0.2A^{-1} \\ 0 & I & 0.4I \end{array}\right)$$

A^{-1} beräknas och vi får

$$\text{SVAR:} \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 0.6 \\ 0.4 & -0.2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

6. Då $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$ blir A:s egenvärden 2 och 1. Egenrummen bestämmes på sedvanligt sätt. Man finner då att $E_1 = span\{(2, 1, -1)\}$ och $E_2 = span\{(2, -1, 0), (3, 0, -1)\}$.

Detta ger

$$\text{SVAR} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. *Uppgiften innehöll ett feltryck och utgick därför.*

8. V:s ortogonala komplement $V^\perp$ utgörs av de (x_1, x_2, x_3, x_4) sådana att $3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$ och $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Löser vi detta ekvationssystem får vi $V^\perp = span\{(1,1,2,-1),(0,1,1,2)\}$. För de (x_1, x_2, x_3, x_4) som tillhör både $U^\perp$ och $V = (V^\perp)^\perp$ gäller då

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Detta ekvationssystem har lösningen

SVAR: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(-1, -1, 1, 0)$.

9. Vektorerna (1,0,0), (0,1,1) och (1,2,3) är linjärt oberoende och en bas för R^3. Värderummet spänns då upp av $T(1,0,0)$, $T(0,1,1)$ och $T(1,2,3)$, dvs av vektorerna (0,1,1), (1,0,1) och (1,2,3). Okular besiktning, t ex, ger att (1,2,3)=(1,0,1)+2(0,1,1). Dessa tre vektorer är alltså linjärt beroende, men (1,0,1) och (0,1,1) är linjärt oberoende. Slutsats: Värderummets dimension är 2 och en bas för värderummet är (1,0,1) och (0,1,1).

Den okulara besiktningen ovan ger också att

$$T(0,1,1) + 2T(1,0,0) - T(1,2,3) = (0,0,0) \quad \text{dvs} \quad T((0,1,1) + 2(1,0,0) - (1,2,3)) = (0,0,0)$$

eller $T(1,-1,-2) = (0,0,0)$.

Då nollrummets dimension är lika med 3 minus värderummets dimension har vi alltså att nollrummet har basen (1,-1,-2) t ex.

10. Vektorerna $(1,0,-1)^\perp$ och $(1,1,1)^\perp$ är egenvektorer hörande till egnvärdet 1. Då A är symmetrisk med egenvärdet 2 får vi att planets normal (1,-2,1) är en egenvektor hörande till egenvärdet 2. Talen λ_1, λ_2 och λ_3 bestämmes nu så att

$$(1,-3,-1) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(1,1,1) + \lambda_3(1,-2,1).$$

Man finner att $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ och $\lambda_3 = 1$. Vi får nu

$$A\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix}$$

SVAR: $Aw^\perp = (2,-5,0)$.