LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMENSSKRIVNING I LINJÄR ALGEBRA, SB4046, KTH

2007-08-18

① $n=1 \Rightarrow VL = (1+1)\cdot 2^{1-1} = 2$ & $HL = 1\cdot 2^1 = 2$, ok

Antag nu att formeln är sann för $n=p$, dvs induktionsantagandet är: $\sum_{k=1}^{p}(k+1)\cdot 2^{k-1} = p\cdot 2^p$.

Vi vill visa att $\sum_{k=1}^{p+1}(k+1)\cdot 2^{k-1} = (p+1)\cdot 2^{p+1}$. Vi har

$$\sum_{k=1}^{p+1}(k+1)2^{k-1} = \sum_{k=1}^{p}(k+1)\cdot 2^{k-1} + (p+2)\cdot 2^p = (\text{ind. antag}) =$$

$$= p\cdot 2^p + (p+2)\cdot 2^p = 2^p(p+p+2) = 2^p(2p+2) = 2^{p+1}(p+1). \square$$

② Vi använder $z = \frac{z_1\cdot z_2}{z_3} \Rightarrow |z| = \frac{|z_1||z_2|}{|z_3|}$ och

$\arg(z) = \arg\left(\frac{z_1\cdot z_2}{z_3}\right) = \arg z_1 + \arg z_2 - \arg z_3$ och får då

$|z_1| = |2+2i| = \sqrt{8}$, $|z_2| = |1+i\sqrt{3}| = 2$, $|z_3| = |3i(\sqrt{12}-2i)| = 12$

& $\arg z_1 = \arg(2+2i) = \arctan 1 = \pi/4$

$\arg z_2 = \arg(1+i\sqrt{3}) = \arctan\sqrt{3} = \pi/3$

$\arg z_3 = \arg(3i(\sqrt{12}-2i)) = \arctan\sqrt{3} = \pi/3$

$$\Rightarrow |z| = \frac{|z_1||z_2|}{|z_3|} = \frac{\sqrt{8}\cdot 2}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ och } \arg z = \pi/4 + \pi/3 - \pi/3 = \pi/4$$

$$\Rightarrow z = \frac{(2+2i)(1+i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12}-2i)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$\square$

5B4046
18/8-07

(3) $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=4 \\ x_1+(a+2)x_2+4x_3=13 \\ -x_1-3x_2+ax_3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+3x_2+x_3=4 \\ (a-1)x_2+3x_3=9 \\ (a+1)x_3=6 \end{cases}$

Då $a\neq\pm1$ har systemet en entydig lösning.

Då $a=-1$ $(0\cdot x_3=6)$ saknas lösning.

Då $a=+1$ finns oändligt antal lösningar ty

vi får $x_3=3$ och $\begin{cases} x_1=1-3t \\ x_2=t \\ x_3=3 \end{cases}$.

(4) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&0&0 \\ 1&2&3&0&1&0 \\ 1&3&2&0&0&1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&0&0 \\ 0&1&2&-1&1&0 \\ 0&1&-1&0&-1&1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&2&-1&0 \\ 0&1&2&-1&1&0 \\ 0&0&-3&1&-2&1 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3&0&0&5&-1&-1 \\ 0&3&0&-1&-1&2 \\ 0&0&3&-1&2&-1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5&-1&-1 \\ -1&-1&2 \\ -1&2&-1 \end{pmatrix}$ □

(5) Vi använder $u\cdot v=|u||v|\cos\alpha$ (skalärprodukten).

$u=(1,-3,2)$, $v=(2,1,a) \Rightarrow |u|=\sqrt{14}$ & $|v|=\sqrt{5+a^2}$

$u\cdot v=(1,-3,2)\cdot(2,1,a)=2a-1$, & $\cos 60°=1/2 \Rightarrow$

$u\cdot v=|u||v|\cos\alpha \Leftrightarrow 2a-1=\sqrt{14(5+a^2)}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{a=11}}$

(Observera att kvadrering av ovanstående ekvation för att lösa den tillför en icke-giltig lösning till vårt problem, nämligen $a=-3$, genom $2a-1=-\sqrt{14(5+a^2)}\cdot\frac{1}{2}$).

□

SB4046
18/8-07

⑥ Låt $P=(x,y,z)$ vara en godtycklig punkt på M. Då $P_0 \in M$ och n är en normalvektor till M har vi $\overline{P_0P} \cdot n = 0$ där $\overline{P_0P} = (x-1, y+2, z-4)$ och vi får $(x-1, y+2, -4) \cdot (-3, 2, 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{-3x+2y+z+3=0}$ är planets ekvation.

Avståndet från $(1,1,1)$ till M ges av

$$D = \frac{|-3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3|}{\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}} = \underline{\underline{3/\sqrt{14}}}$$

□

OBS! Se nr. ⑦ längst ner!

⑧ Nollrummet erhålls genom att lösa $Ax=0$, dvs

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2-2x_3=0 \\ 3x_1+4x_2-5x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ -x_2-4x_3=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=7t \\ x_2=-4t \\ x_3=t \end{cases}$$

så en bas för nollrummet är $\underline{\underline{(7,-4,1)}}$ och enligt dimensionssatsen har värderummet dimensionen $3-\dim(\text{nollrummet}) = 3-1 = \underline{\underline{2}}$

⑦ Låt (e_1,e_2) vara basen i planet. Då är $(2,1) = 2e_1+e_2$ & $(-1,0) = -e_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(2,1) = F(2e_1+e_2) = 2F(e_1)+F(e_2) = (1,3,-1)$

och $F(-1,0) = F(-e_1) = -F(e_1) = (2,0,-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow F(e_1) = (-2,0,1) \Rightarrow F(e_2) = (1,3,-1) - 2F(e_1) =$

$= (1,3,-1) - 2(-2,0,1) = (5,3,-3) \Rightarrow F = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ □

5B4046
18/8-07

⑨ A symmetrisk dvs $A^t = A$. Således får vi

$$(B^tAB)^t = (B^t(AB)^t)^t = (AB)^t(B^t)^t = (AB)^tB = B^tA^tB = \underline{\underline{B^tAB}}$$

$A^t = A$

□

⑩ $A^n = P^{-1}D^nP$ där P är en inverterbar matris som diagonaliserar A och D är diagonalmatrisen.

För egenvärdena löser vi $\det(A-\lambda E) = 0$ där E = enhetsmatrisen

$$\Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \Rightarrow \underline{\lambda = 2,3} \text{ och}$$

motsvarande egenvektorer fås genom att lösa $(A-\lambda E)x = 0$:

$$\lambda = 2 \Rightarrow (A-2E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \end{cases} \Rightarrow v_1 = (-2,1)$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow (A-3E)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{cases} \Rightarrow v_2 = (-1,1)t \quad t \neq 0$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ \& \ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 2^n & -3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2^n - 3^n & 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2\cdot 3^n \end{pmatrix} = \underline{\underline{2^n\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + 3^n\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}}$$

D