Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

Lösningsforslag till tentamen i 5B1146 den 8/01 2007

1Vi kollar först basfallet $n = 1$. Både vänsterledet och högerledet är lika med 2.

Antar nu att formel är redan bevisad för något heltal n. Vi skall visa den för nästa heltal $n + 1$. Vi har

$$V.L.(n+1) = 1\cdot 2 + \cdots + n\cdot(n+1) + (n+1)\cdot(n+2) = \left[\text{enligt induktionsantagandet}\right] = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = H.L.(n+1).$$

Beviset är klart.

2. Vi har

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\pi/3}$$

och

$$(1 + i\sqrt{3})^{10} = 2^{10}e^{10\pi i/3}.$$

Analogt,

$$(1 - i\sqrt{3}) = 2e^{-i\pi/3} \qquad \text{och} \qquad (1 - i\sqrt{3})^{10} = 2^{10}e^{-10\pi i/3}.$$

Vi får

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^{10} + (1 - i\sqrt{3})^{10}}{2^{10}} = e^{10\pi i/3} + e^{-10\pi i/3} = 2\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -1.$$

3. Vi har

$$\vec{AB} = (2, 2, 2) \qquad \text{och} \qquad \vec{AC} = (0, 1, -1).$$

Då normalvektor $\mathbf{n}$ till planet är kryssprodukt

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x(-4) + \mathbf{e}_y \cdot 2 + \mathbf{e}_z \cdot 2 = (-4, 2, 2) = 2 \cdot (-2, 1, 1).$$

Planets ekvation blir

$$-2(x + 1) + y + (z - 1) = 0$$

eller

$$-2x + y + z = 3.$$

4. En möjlig lösning: att undersöka systemet

$$\begin{cases} t - 1 &= s + a \\ 2t + 3 &= 3s \\ a - t &= s - 3 \end{cases}$$

Systemet har matris

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a+1 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -a-3 \end{array}\right).$$

Efter radoperationer den blir

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a+1 \\ 0 & -1 & -2a-5 \\ 0 & 0 & 4a+8 \end{array}\right).$$

Den sista ekvationen (och hela systemet) har någon lösning endast i fall $a = -2$ och lösningen blir då $t = 0$ och $s = 1$. Dessa värdena ger oss skärningspunkt $(-1, 3, -2)$.

5. Om linjens ekvation är $y = kx + b$, då problemet är ekvivalent med att lösa överbestämda systemet med obekanta k och b

$$\begin{cases} -k+b &= -1 \\ k+b &= 0 \\ 2k+b &= 1 \end{cases}$$

i minstakvadratmetodens mening. Matrisform av systemet är

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c},$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}^t\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså , obekanta k och b är lösningar till systemet

$$\begin{cases} 6k+2b &= 3 \\ 2k+3b &= 0 \end{cases}$$

Vi löser systemet och vi får

$$k = \frac{9}{14} \qquad b = -\frac{3}{7}.$$

6. Matrisen A är inverterbar då $\det A \neq 0$. Vi har

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-a^2 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a^2 & a & 0 \\ a & 1-a^2 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-a^2 & a \\ a & 1-a^2 \end{vmatrix} = (1-a^2)^2 - a^2 = (1-a^2-a)(1-a^2+a).$$

Alltså, matrisen är inverterbar för alla a förutom lösningar till ekvationen

$$(1-a^2-a)(1-a^2+a)=0.$$

Ekvationen $1-a^2-a=0$ har rötter

$$a=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{5}\right)$$

och ekvationen $1-a^2+a=0$ har rötter

$$a=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right).$$

Alltså, matrisen är inverterbar för alla a förutom

$$a=\frac{1}{2}\left(\pm1\pm\sqrt{5}\right).$$

7. Systemet har matris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & a & -21 & 3 \\ 3 & 7 & a & 5 \end{array}\right).$$

Efter radoperationer och omkastning av andra och tredje rader får man matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a-9 & 2 \\ 0 & 0 & -a^2+7a & 4-2(a+2) \end{array}\right).$$

Vi ser att systemet har entydig lösning i fall då $-a^2+7a\neq 0$ d v s $a\neq 0$ och $a\neq 7$.

I speciella fall $a=0$ matrisen blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och systemet har oändligt många lösningar.

I speciella fallet $a=7$ matrisen blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$$

och systemet har inga lösningar.

8. Riktningsvektor längs linjen är $(1,2,2)^t$ och efter normaliseringen får vi vektorn $\mathbf{p}=(1/3,2/3,2/3)^t$. Varje vektor $\mathbf{v}$ i rymden kan skrivas som

$$\mathbf{v}=P_l\mathbf{v}+\mathbf{v}',$$

där $P_l\mathbf{v}$ är proektion av $\mathbf{v}$ på linjen l:

$$P_l\mathbf{v}=(\mathbf{v},\mathbf{p})\mathbf{p}$$

och $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - P_l\mathbf{v} = \mathbf{v} - (\mathbf{v},\mathbf{p})\mathbf{p}$ är vektor vinkelrät mot linjen l. Efter avbildningen vektor $P_l\mathbf{v}$ ändras inte medan vektor $\mathbf{v}'$ ändrar sitt tecken. Vi får alltså

$$A\mathbf{v} = P_l\mathbf{v} - \mathbf{v}' = 2(\mathbf{v},\mathbf{p})\mathbf{p} - \mathbf{v}.$$

Om $\mathbf{v} = (x,y,z)^t$, då

$$A\mathbf{v} = 2\left(\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x/9 + 4y/9 + 4z/9 \\ 4x/9 + 8y/9 + 8z/9 \\ 4x/9 + 8y/9 + 8z/9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -7x/9 + 4y/9 + 4z/9 \\ 4x/9 - y/9 + 8z/9 \\ 4x/9 + 8y/9 - z/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/9 & 4/9 & 4/9 \\ 4/9 & -1/9 & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & -1/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Vi avgör att matrisen av avbildningen är

$$\begin{pmatrix} -7/9 & 4/9 & 4/9 \\ 4/9 & -1/9 & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

9.

(a) Svar: egenvärdena är $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1/2$. Motsvarande egenvektorer är

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Först uttrycker vi vektor $(0 \quad 1)^t$ som en linjär kombination av egenvektorer $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Motsvarande system har lösningar $\alpha = 5/3$, $\beta = -2/3$. Eftersom $A^{2007}\mathbf{v}_1 = (-1)^{2007}\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1$ och $A^{2007}\mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2007}\mathbf{v}_2$, avgör vi att

$$A^{2007}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{5}{3}\mathbf{v}_1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2007}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} + \frac{10}{3\cdot 2^{2007}} \\ -\frac{5}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^{2007}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

10. Antar att λ är något egenvärdet till A och $\mathbf{v}$ är motsvarande egenvektor. Då $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ och $A^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Eftersom $A^2 = A$, avgör vi att $\lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$ och eftersom $\mathbf{v} \neq 0$, vi får $\lambda^2 = \lambda$. Det enda lösningar till denna ekvation är $\lambda = 1$ och $\lambda = 0$.

Ett exempel av sådan matris:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$