Institutionen för matematik
KTH

**Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II för F1, D1 och I1, 5B1109, måndagen den 20 augusti 2001 klockan 8.00-13.00.**

Examinatorer: Olof Heden och Dan Laksov.

Tillåtna hjälpmedel: INGA HJÄLPMEDEL ÄR TILLÅTNA.

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 21 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem.

Bonuspoäng: Maximalt får fyra bonuspoäng tillgodoräknas från inlämningsuppgifter och lappskrivningar höstterminen 2000.

Lösningarna måste, såvida inget annat anges, motiveras utförligt.

PROBLEM:

1. (3p) Bestäm på formen $a + ib$

$$\frac{z + \overline{z}w + \overline{w}}{z\overline{z} + w}$$

om $w = 3 - i$ och $z = 2 + i$.

2. (3p) Bestäm dimensionen av det delrum till $R^4$ som spänns upp av vektorerna $(1, 0, -1, 1)$, $(0, 1, 4, -6)$, $(1, 1, 1, -1)$ och $(1, 1, 0, 1)$.

3. (3p) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 2-a & a & 1+a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

där $a$ är ett reellt tal. För vilka värden på $a$ är matrisen $A$ inverterbar?

4. (3p) Ekvationen $z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 24z + 10 = 0$ har roten $z = 1 - 2i$. Bestäm samtliga rötter.

**V.G.V.**

5. (3p) Låt $A$ beteckna matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matriser $X$ och $Y$ sådana att

$$\begin{array}{rcll} X & + & 2A^{-1}Y & = A^{-1} \\ 3AX & + & Y & = I \end{array}$$

där $I$ betecknar identitetsmatrisen.

6. (4p) Bestäm en diagonalmatris $D$ och en inverterbar matris $P$ sådan att om

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

så gäller $A = PDP^{-1}$.

7. (4p) En parallellepiped i $xyz$-rymden begränsas av planen $z = 0$, $z = 1$, $3x + y - 2z = 0$, $3x + y - 2z = 6$, $3x + y - z = 0$ och $3x + y - z = -6$. Bestäm parallellepipedens volym.

8. (4p) Låt $U$ beteckna ortogonala komplementet till $span\{(1, 0, 1, -1)\}$ och låt $V$ beteckna $span\{(3, -2, 0, 1), (-1, -1, 1, 0)\}$. Bestäm de vektorer som tillhör både $U$ och $V$.

9. (4p) För en linjär avbildning $T$ gäller att $T(1, 0, 0) = (0, 1, 1)$, $T(0, 1, 1) = (1, 0, 1)$ och $T(1, 2, 3) = (1, 2, 3)$. Bestäm en bas för $T$:s värdemängd (range/image) resp en bas för $T$:s nollrum (nullspace/kernel).

10. (4p) $A$ är en symmetrisk $3 \times 3$-matris. Ett av $A$:s egenvärden är lika med två. För all vektorer $v^T = (x \;\; y \;\; z)$ sådana att $x - 2y + z = 0$ gäller att $Av = v$.

Låt $w^T = (1 \;\; -3 \;\; -1)$. Bestäm $Aw$.