Matematik KTH
Tentamensskrivning Linjär Algebra 5B4046
Datum: 2007-10-01
Skrivtid: 5 timmar.
Inga hjälpmedel tillåtna.
Varje uppgift ger 3 poäng. Gräns för godkänt: 15 poäng.
Examinator: Mattias Dahl

1. Visa med hjälp av induktion att för varje heltal $n \geq 2$ gäller

$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

2. Lös ekvationen $z^2 = (1+i)/(1-i)$.

3. Bestäm för varje reellt tal a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ 2x_1 + ax_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

4. För vilka x är de tre vektorerna i rummet: $v_1 = (1, x, 0), v_2 = (-1, 2, 4)$ och $v_3 = (1, 3, 2x)$ linjärt beroende?

5. Låt O vara origo och $A = (2, 3, 4)$ en punkt. Bestäm den punkt P på z-axeln för vilken $\overline{AP}$ är vinkelrät mot $\overline{OA}$.

6. Bestäm ekvationen för den linje L i planet som går genom punkten $P_0 = (2, 1)$ och är parallell med linjen $(x, y) = (1, 3) + t(4, -3)$ där $t \in \mathbb{R}$. Ange L:s ekvation på formen $y = kx + m$.

7. a) Bestäm i basen (e_1, e_2, e_3) matrisen A för den linjära avbildning F för vilken $F(e_1) = e_1 + 2e_2, F(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3, F(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$. Är A inverterbar? Bestäm i så fall A^{-1}.

8. Bestäm en bas för nollrummet till $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Vilken dimension har värderummet?

9. Antag att matriserna A, B och $(A + B)$ är inverterbara. Visa att då är också $(A^{-1} + B^{-1})$ inverterbar och dess invers ges av $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}A$.

10. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Finn en matris som diagonaliserar A.

Lycka till!