LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMENSSKRIVNING I LINJÄR ALGEBRA, 5B4046, KTH

2007-10-01

(1) Då $n=2$ är $VL = 1-\frac{1}{2^2} = 3/4$ & $HL = \frac{2+1}{2\cdot 2} = 3/4$, ok.

Antag likheten gäller för $n=p$ (induktionsantagandet):

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{p+1}{2p}.$$ Vi vill visa att:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right) = \frac{p+2}{2(p+1)}.$$ Vi har

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right) \overset{\text{induktionsantagandet}}{=} \frac{p+1}{2p}\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{p+1}{2p} - \frac{p+1}{2p(p+1)^2} = \frac{p+1}{2p} - \frac{1}{2p(p+1)} = \frac{(p+1)^2-1}{2p(p+1)} = \frac{p+2}{2(p+1)}$$

□

(2) $$z^2 = (1+i)/(1-i) = \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1^2+2i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

Sätt $z=a+bi \Rightarrow z^2 = i \Leftrightarrow (a+bi)^2 = i$

$$\Leftrightarrow$$

$$a^2+2iab-b^2 = i$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab = i \end{cases}$$

Löser vi detta system får vi $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ och $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$. □

SB4046
10/1-07

③ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ 2x_1 + ax_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + (a-1)x_3 = 1 \\ (a-2)x_2 = -1 \end{cases}$

Då $a \neq 1$ och $a \neq 2$ har systemet entydig lösning

Då $a = 2$ saknas lösning $(0 \cdot x_2 = -1)$

Då $a = 1$ har systemet oändligt antal lösningar,

ty $x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1-t \\ x_2 = 1 \\ x_3 = t \end{cases}$

$\square$

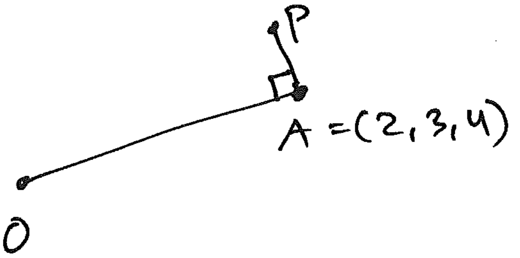
---

④ Lös ekvationen $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2x \end{vmatrix} = 0$, dvs

$0 = 4x + 4x - 12 + 2x^2 = 2x^2 + 8x - 12 \Rightarrow \underline{\underline{x = -2 \pm \sqrt{10}}}$

$\square$

⑤



P ligger på z-axeln så vi sätter $P = (0,0,z)$.

$\overline{OA} = (2,3,4)$, $\overline{AP} = (-2,-3,z-4)$. Vi vill ha $\overline{OA} \perp \overline{AP}$,

dvs $\overline{AP} \cdot \overline{OA} = 0 \iff 0 = (-2,-3,z-4) \cdot (2,3,4) = -4 - 9 + 4(z-4) =$

$= 4z - 29 \Rightarrow z = 29/4 \Rightarrow \underline{\underline{P = (0,0,\tfrac{29}{4})}}$

$\square$

5B4046
10/1-07

(6) $P_0 = (2,1) \in \mathcal{L}$. Låt $P = (x,y)$ vara en godtycklig punkt på $\mathcal{L}$. Då är $\overline{P_0P}$ parallell med vektorn $(4,-3)$, dvs $(x-2, y-1) = t(4,-3) \Rightarrow$

$\mathcal{L}: (x,y) = (2,1) + t(4,-3)$.

En normal till $\mathcal{L}$ ges av $n = (3,4)$ (ty $(3,4)\cdot(4,-3) = 0$)

Då måste $\overline{P_0P} \cdot n = 0 \Leftrightarrow (x-2, y-1)\cdot(3,4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x-2) + 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{10}{4}$ ∎

(7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och A är inverterbar ty

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ ∎

(8) För nollrummet löser vi $Ax = 0$, dvs

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t - s \\ x_2 = -2t + s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ så en bas för nollrummet

är $(-1,-2,1,0), (-1,1,0,1)$ och enligt dimensionssatsen har värderummet dimension $= \#\text{kolonner} - \dim(\text{nollrummet}) =$

$= 4 - 2 = 2$ ∎

5B4046
10/1-07

9. $(A^{-1}+B^{-1})\cdot B(A+B)^{-1}A =$

$= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + B^{-1}B(A+B)^{-1}A =$ ← $B^{-1}B = E$ = enhetsmatrisen

$= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + (A+B)^{-1}A =$

$= A^{-1}B(A^{-1}(A+B))^{-1} + (A^{-1}(A+B))^{-1} =$

$= A^{-1}B(E+A^{-1}B)^{-1} + (E+A^{-1}B)^{-1} =$

$= (A^{-1}B+E)(E+A^{-1}B)^{-1} = (E+A^{-1}B)(E+A^{-1}B)^{-1} = E.$

Pss visas att $B(A+B)^{-1}A(A^{-1}+B^{-1}) = E.$ $\square$

---

10. $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)$ med egenvärden $\lambda = 1, -2, 3.$

Vi finner egenvektorerna genom att lösa ekvationssystemen $(A-\lambda E)x = 0$ för $\lambda = 1, -2$ och 3.

$\lambda = 1 \Rightarrow v = t(-1,4,1);\ t \neq 0$

$\lambda = -2 \Rightarrow v = t(1,-1,-1);\ t \neq 0$

$\lambda = 3 \Rightarrow v = t(1,2,1);\ t \neq 0$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliserar A

$\square$