

5B1146, Geometri och algebra för E1.

Tentamen, måndagen den 8 januari 2007 kl 14.00–19.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Inga hjälpmedel tillåtna. För betyg tre krävs minst 16 poäng, för fyra krävs minst 22p och för femma krävs minst 30p. Den som får 15p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget tre. Kontakta i så fall läraren!

L Y C K A T I L L !

- (3p) 1. Visa med hjälp av induktion att

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$$

för alla heltal $n = 1, 2, 3, \dots$

- (3p) 2. Skriv talet

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^{10} + (1 - i\sqrt{3})^{10}}{2^{10}}$$

på formen $a + ib$ där a och b är reella tal.

- (3p) 3. Ett plan går genom punkter

$$A(-1, 0, 1), B(1, 2, 3) \quad \text{och} \quad C(-1, 1, 0).$$

Bestäm planets ekvation.

- (3p) 4. För vilka värden på parametern a linjerna $l_1 : (x, y, z) = (t - 1, 2t + 3, a - t)$ och $l_2 : (x, y, z) = (s + a, 3s, s - 3)$ skär varandra i en punkt? Bestäm även skärningspunkten för sådana a .

- (4p) 5. Bestäm rät linje $y = kx + b$ som bäst approximerar punkterna

$$A(-1, -1), B(1, 0) \quad \text{och} \quad C(2, 1)$$

i minstakvadratmetodens mening.

- (3p) 6. För vilka värden på parametern a är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

inverterbar?

(4p) 7. För vilka värden på parametern a har systemet

$$\begin{cases} x+ 2y+ 3z = 1 \\ -x+ ay- 21z = 3 \\ 3x+ 7y+ az = 5 \end{cases}$$

inga lösningar; oändligt många lösningar; en lösning?

(4p) 8. Bestäm matrisen A för den linjära avbildningen i rummet \mathbb{R}^3 som ges av rotation med 180° kring linjen $l : (x, y, z) = (t, 2t, 2t)$.

(2p) 9. (a) Bestäm samtliga egenvärdena och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 5 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2p) (b) Bestäm $A^{2007}\mathbf{x}$, där $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4p) 10. En kvadratisk matris A är sådan att $A^2 = A$. Bevisa att alla egenvärdena till A kan vara endast 0 eller 1. Ange något exempel av sådan matris som har både tal 0 och 1 som egenvärdena.