Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

5B1146, Geometri och algebra för E1.
Tentamen, onsdagen den 18 oktober 2006 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Inga hjälpmedel tillåtna. För betyg tre krävs minst 16 poäng, för fyra krävs minst 22p och för femma krävs minst 30p. Den som får 15p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget tre. Kontakta i så fall läraren!

L Y C K A T I L L !

(3p) **1.** Visa med hjälp av induktion att

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{för} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3p) **2.** Polynom $2x^3 + 7x^2 - 10x - 50$ har en komplex rot $x = -3 - i$. Bestäm samtliga rötter till polynomet.

(3p) **3.** Bestäm avståndet från punkten $M = (1, 1, 2)$ till räta linjen

$$l\,:\,(x, y, z) = (4 - t,\ 2t,\ t + 1).$$

(2p) **4.** (a) Visa att linjerna

$$l_1\,:\,(x, y, z) = (3t - 6,\ 2t,\ t) \qquad \text{och} \qquad l_2\,:\,(x, y, z) = (-s - 1,\ s + 5,\ 2s + 4)$$

skär varandra i en punkt.

(2p) (b) Bestäm ekvation av planet som innehåller både linjerna.

(4p) **5.** Lös, i minstakvadratmening, det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y = 10; \\ 3x + 2y = 0; \\ -2x + y = 1. \end{cases}$$

(2p) **6.** (a) För vilka värden på parameter a är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$$

inverterbar?

(2p) (b) Bestäm inversmatris till A för sådana värden på a.

VÄND!

(3p) **7.** Låt $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning. Det är givet att

$$T\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}; \qquad T\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}; \qquad T\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Bestäm $T\mathbf{x}$, där

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(3p) **8.** För vilka värden på parameter a är vektorerna

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\a\\6\\5\end{pmatrix}$$

i rummet $\mathbb{R}^4$ linjärt beroende?

(4p) **9.** Diagonalisera ortogonalt matrisen

$$A=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&3\\4&3&1\end{pmatrix},$$

d v s ange ortogonal matris P och diagonal matris D sådana att $A = PDP^t$.

(4p) **10.** Visa att mängden av alla matriser i form

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix},$$

där α och β är godtyckliga reella tal utgör ett vektorrum. Ange någon bas av vektorrummet (motiveringen krävs!). Vad är dimension av vektorrummet?