Matematiska Institutionen
KTH

**Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, 5B1109, för D1 den 11 januari 2006 klockan 08.00-13.00.**

Examinator: Roy Skjelnes

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 24 poäng ger betyget fyra och 32 poäng ger betyget fem

Bonuspoäng: Maximalt får sex bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar höstterminen 2005.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar.

PROBLEM:

1. (3p) Bestäm avståndet från punkten $P = (1, 2)$ till linjen $3x + 4y = 1$.

   **Svar:** Avståndet ges av formeln
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2.$$

2. (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

   **Svar:** Egenvärden ges som nollställen till polynomet
$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix}.$$
   Polynomet $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10$ har nollställen $\lambda = -2$ och $\lambda = 5$. Egenvektorerna tillhörande $\lambda = -2$ bestäms av de nollskilda lösningarna till
$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$
   Detta ger at vektorer på formen $(t, -t)$, med $t \neq 0$ är egenvektorer med egenvärdet $-2$. På samma sätt finner vi att vektorer på formen $(3t, 4t)$, med $t \neq 0$ är egenvektorer med egenvärdet 5.

3. (3p) För vilka reella tal $a$ är matrisen $A$ inverterbar, där
$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   **Svar:** Matrisen är inverterbar om och endast om dess determinant är nollskild. Vi har att
$$\det(A) = a \cdot 1 \cdot (a - 1) = a(a - 1).$$
   Matrisen $A$ är inverterbar om $a \neq 0$ och $a \neq 1$.

4. (3p) För den linjära avbildningen $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1,1) = (2,3)$ och $T(1,2) = (-4,-6)$. Bestäm bildrummet till $T$.

   **Svar:** Vektorerna $(1,1)$ och $(1,2)$ är en bas för $\mathbf{R}^2$ och följaktligen spänner $T(1,1)$ och $T(1,2)$ upp bildrummet. Vi ser att $T(1,2) = -2T(1,1)$, och det följer att $T(1,1) = (2,3)$ är en bas för bildrummet till $T$, m.a.o. bildrummet är linjen genom origo och punkten $(2,3)$.

5. (3p) Matrisen $A$ satisfierar ekvationen
$$2A^2 - A - I = 0,$$
   där $I$ är identitetsmatrisen och 0 är nollmatrisen. Visa att $A$ är inverterbar.

   **Svar:** Ekvationen $2A^2 - A - I = 0$ skriver vi om som
$$I = 2A^2 - A = (2A - I)A,$$
   vilket betyder att inversen till $A$ är $2A - I$, och speciellt är matrisen $A$ inverterbar.

6. (4p) Bestäm en ortonormal bas för $\mathbf{R}^2$ med den viktade inreprodukten
$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= 2x_1y_1 + 3x_2y_2.$$

   **Svar:** Vi har att $e_1 = (1,0)$ och $e_2 = (0,1)$ är en bas, och detta är också en ortogonal bas med avseende på den viktade inreprodukten. Vektoren $e_1$ har längd
$$||e_1|| = \sqrt{< e_1, e_1 >} = \sqrt{2}, \quad \text{och} \quad ||e_2|| = \sqrt{3}.$$
   Det följer nu att vektorerna $\frac{1}{\sqrt{2}}e_1$ och $\frac{1}{\sqrt{3}}e_2$ är en orthonormal bas.

7. (4p) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet i det Euklidiska inreproduktrummet $\mathbf{R}^4$ till delrummet
$$W = \text{Span}\{(1,0,0,0), (1,1,0,1), (0,1,0,1)\}.$$

   **Svar:** Vi ser att vektoren $(1,1,0,1)$ kan skrivas som summan av $(1,0,0,0)$ och $(0,1,0,1)$. Vektorrummet $W$ är då två dimensionelt, och en bas för dets ortogonala komplement skall bestå av to vektorer. Följande två vektorer
$$(0,0,1,0) \quad \text{och} \quad (0,1,0,-1)$$
   är linjärt oberoende och med i det ortogonala komplementet till $W$; och dermed också en bas för $W^\perp$.

8. (4p) Låt $\Pi$ beteckna planet som ges av ekvationen $x + y - 2z = 3$. Bestäm en ekvation för det plan som ligger vinkelrätt mot $\Pi$ och som innehåller punkterna $(1,1,1)$ och $(0,-1,1)$.

   **Svar:** Det sökta planet $P$ innehåller punkterna $A = (1,1,1)$ och $B = (0,-1,1)$, och då också linjen $(1,1,1) + t(1,2,0)$. En normal till planet $P$ fås vid $n \times v$, där $n = (1,1,-1)$ är normalen till $\Pi$ och $v = (1,2,0)$ är riktningsvektoren till linjen. Vi har att
$$N = n \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2,-1,1).$$
   En ekvation till det sökta planet $P$ blir då t.ex.
$$((x,y,z) - A) \cdot N = 2(x-1) - 1(y-1) + 1(z-1) = 2x - y + z - 2 = 0.$$

9. (5p) Spåret till en $(n \times n)$-matris $A = (a_{i,j})$ defineras som summan av diagonalelementen; $\mathrm{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$. Vi har en linjär avbildning

$$\mathrm{Tr} : M_{n,n} \to \mathbf{R}$$

från vektorrummet av $(n \times n)$-matriser till de reella talen som skickar en matris $A$ till dess spår. Bestäm dimensionen till kärnan av Tr.

**Svar:** Avbildningen Tr är uppenbarligen surjektiv. Av dimensionsatsen följer det att dimensionen till kärnan $K$ är

$$\dim(K) = \dim(M_{n,n}) - \dim(\mathbf{R}) = n^2 - 1.$$

10. (6p) Låt $T : V \to V$ vara en linjär avbildning på ett vektorrum $V$ av dimension $n$. Antag att $\ker(T) \neq 0$ och att $T$ har $n-1$ olika nollskilda egenvärden. Visa att $T$ är diagonaliserbar.

**Svar:** En operator är diagonaliserbar om och endast om egenrummet $E$ är lika med $V$. Då kärnan till $T$ är nollskild har vi att $T(x) = 0 = 0 \cdot x$ för åtminstonde en nollskild vektor $x$. Detta ger att 0 är ett egenvärde, och vi vet at det finns $n-1$ olika nollskilda egenvärden. Totalt har vi då $n$ olika egenvärden. Egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende vilket ger at $\dim(E) \geq n$. Då dimensionen till $V$ är $n$ har vi att egenrummet $E = V$, och att $T$ är diagonaliserbar.