Matematik KTH
Tentamensskrivning Linjär Algebra 5B4046
Datum: 0801 14
Skrivtid: 5 timmar.
Inga hjälpmedel tillåtna.
Varje uppgift ger 3 poäng. Gräns för godkänt: 15 poäng.
Examinator: Mattias Dahl

1. Visa med hjälp av induktion att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = \frac{2n}{n+1}$ för alla heltal $n \geq 1$.
Tips: $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$.

2. Bestäm $\arg\left(\frac{i}{1+\frac{i(\sqrt{3}-1)}{1+i}}\right)$.

3. Bestäm för varje reellt tal a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

4. Avgör om matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ är inverterbar och bestäm i så fall A^{-1}.

5. En triangel i rummet har hörn i $A = (1,0,2)$, $B = (0,-1,1)$ och $C = (2,1,2)$ (ON-system). Bestäm triangelns sidlängder och (cosinus för) vinklarna.

6. Bestäm (det vinkelräta) avståndet från punkten $P_0 = (1,2,1)$ till linjen $L : (x,y,z) = (-2,1,1) + t(2,-2,1)$ där $t \in \mathbb{R}$ (ON-system).

7. a) En linjär avbildning av rummets vektorer har i en given bas matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Bestäm bilden av vektorn $(2,-1,1)$.
b) Bestäm avbildningsmatrisen för en rotation 30° moturs (i $\mathbb{R}^2$) och bestäm koordinaterna för vektorn $(2,-1)$ om den roteras 30° moturs.

8. Bestäm dimensionen av nollrummet och värderummet för en linjär avbildning med matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Visa att om A är en kvadratisk matris sådan att $A^2 - 3A = -2E$ (där E är enhetsmatrisen) så gäller att $\det(A - E) = 0$ eller $\det(A - 2E) = 0$.

10. Låt $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$. Bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$ och beräkna därefter A^{71}.
Lycka till!

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMENSSKRIVNING I LINJÄR ALGEBRA, 5B4046, KTH.

① $n=1 \Rightarrow VL = \frac{1}{1} = 1$ & $HL = \frac{2\cdot 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$, ok

Antag likheten sann för $n=p$ (induktionsantagandet), dvs $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \frac{2p}{p+1}$. Vi vill visa att

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \frac{2(p+1)}{p+2}.$$

Vi får med $1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1+2+\cdots+k}}_{\text{induktionsantag.}} + \frac{1}{1+2+\cdots+p+(p+1)} =$$

$$= \frac{2p}{p+1} + \frac{1}{1+2+\cdots+p+(p+1)} = \frac{2p}{p+1} + \frac{1}{\frac{(p+1)(p+2)}{2}} =$$

$$= \frac{2p(p+2)}{(p+1)(p+2)} + \frac{2}{(p+1)(p+2)} = \frac{2(p^2+2p+1)}{(p+1)\cdot(p+2)} = \frac{2(p+1)}{(p+2)}$$ □

② $$z = \frac{i}{1+\frac{i(\sqrt{3}-1)}{(1+i)}} = \frac{i}{\frac{1+i+\sqrt{3}i-i}{1+i}} = \frac{i(1+i)}{1+\sqrt{3}i} = \frac{i-1}{1+\sqrt{3}i} = \frac{z_1}{z_2},$$

och $\arg z_1 = \frac{3\pi}{4}$ & $\arg z_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg z = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) =$

$$= \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi-4\pi}{12} = \boxed{\frac{5\pi}{12}}$$ □

SB4046
10/1-07

(3)

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=1 \\ x_1+ax_2+2x_3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+(a-1)x_3=1 \\ (a-2)x_2+(2-a)x_3=-2 \end{cases}$$

(PS! $a=1 \Rightarrow x_2=1$, $x_3=3$ och $x_1=-4$ så finns entydig lösn.)

Då $a=2$ saknar systemet lösning $(0\cdot x_2+0\cdot x_3=-2)$

Då $a=0$ har vi oändligt antal lösningar ty

$$\begin{cases} x_2-x_3=1 \\ -2x_2+2x_3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1-2t \\ x_2=1+t \\ x_3=t \end{cases}$$

Då $a\neq 0$ och $a\neq 2$ har systemet entydig lösning

□

(4)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&2&1&0&0 \\ 2&1&1&0&1&0 \\ -1&1&4&0&0&1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&2&1&0&0 \\ 0&-1&-3&-2&1&0 \\ 0&2&6&1&0&1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&2&1&0&0 \\ 0&-1&-3&-2&1&0 \\ 0&0&0&-3&2&1 \end{array}\right)$$

Således är matrisen A ej inverterbar ty ekvationssystemet saknar lösning då $-3y_1+2y_2+y_3\neq 0$

□

(5) Kalla vinklarna i resp. hörn för α_A, α_B & α_C.

* $\overline{AB}=(-1,-1,-1) = |\overline{AB}|=\sqrt{3}$
  $\overline{AC}=(1,1,0) \Rightarrow |\overline{AC}|=\sqrt{2}$
  $\Rightarrow \cos\alpha_A = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} = \dfrac{(-1,-1,-1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \underline{\underline{-\sqrt{2}/\sqrt{3}}}$

* $\overline{BA}=(1,1,1) \Rightarrow |\overline{BA}|=\sqrt{3}$
  $\overline{BC}=(2,2,1) \Rightarrow |\overline{BC}|=3$
  $\Rightarrow \cos\alpha_B = \dfrac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}||\overline{BC}|} = \dfrac{(1,1,1)\cdot(2,2,1)}{\sqrt{3}\cdot 3} = \underline{\underline{\dfrac{5}{3\sqrt{3}}}}$

* $\overline{CA}=(-1,-1,0) \Rightarrow |\overline{CA}|=\sqrt{2}$
  $\overline{CB}=(-2,-2,-1) \Rightarrow |\overline{CB}|=3$
  $\Rightarrow \cos\alpha_C = \dfrac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{|\overline{CA}|\cdot|\overline{CB}|} = \dfrac{(-1,-1,0)\cdot(-2,-2,-1)}{\sqrt{2}\cdot 3} = \underline{\underline{2\sqrt{2}/3}}$

Svar: Längder: $3, \sqrt{3}, \sqrt{2}$. Vinklar: $\cos\alpha_A=-\sqrt{2}/\sqrt{3}$
$\cos\alpha_B=5/3\sqrt{3}$, $\cos\alpha_C=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ □

SB4046
10/1-07

(6) Den punkt $R=(-2+2t_R, 1-2t_R, 1+t_R)$ på L som ligger närmast P_0 bestäms av att $\overline{RP_0}$ är ortogonal mot linjens riktningsvektor $v=(2,-2,1)$.

Då $\overline{RP_0}=(3-2t_R, 1+2t_R, -t_R)$ får vi att

$\overline{RP_0}\cdot v=0 \Leftrightarrow (2,-2,1)\cdot(3-2t_R, 1+2t_R, -t_R)=0$

$\Rightarrow t_R=4/9$ och avståndet blir

$$|\overline{RP_0}|=\left|\left(3-2\cdot\frac{4}{9}, 1+2\cdot\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}\right)\right|=\left|\left(\frac{19}{9}, \frac{17}{9}, \frac{-4}{9}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{9}\sqrt{19^2+17^2+(-4)^2}=\frac{\sqrt{666}}{\sqrt{81}}=\sqrt{\frac{74}{9}}=\frac{\sqrt{74}}{3}. \ \square$$

(7) a) $\begin{pmatrix}2&5&9\\2&7&1\\3&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\underline{(8,-2,4)}$

b) Rotation 30° moturs: $\begin{pmatrix}\cos 30° & -\sin 30°\\ \sin 30° & \cos 30°\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & -1/2\\ 1/2 & \sqrt3/2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & -1/2\\ 1/2 & \sqrt3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\underline{\left(\frac{2\sqrt3+1}{2}, \frac{2-\sqrt3}{2}\right)} \quad \square$$

(8) För nollrummet löser vi $Ax=0$, dvs

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\\ 3x_1+2x_2+5x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=0\\ x_2-x_3=0\\ -x_2+2x_3=0\end{cases}$$

Då de två sista ekvationerna medför att lösning saknas förutom då $(x_1,x_2,x_3)=0$ (punkt med dim $=0$) får vi $\underline{\dim(\text{nollrum})=0} \Rightarrow \underline{\dim(\text{värderum})}=3-0=\underline{3}$ enligt dimensionssats

5B4046
10/1-07

⑨ $A^2-3A=-2E \iff$

$0=A^2-3A+2E=A^2-A-2A+2E=$

$=A(A-E)-2(A-E)=(A-E)(A-2E)$, dvs

$(A-E)(A-2E)=0$ (nollmatrisen) $\Rightarrow$

$0=|0|=\det 0=\det\big((A-E)(A-2E)\big)=\det(A-E)\cdot\det(A-2E)$

$\Rightarrow \det(A-E)=0$ eller $\det(A-2E)=0$

⑩ $0=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)$ så egenvärdena är

$\lambda=1$ & $\lambda=-1$ $\Rightarrow$ motsvarande egenvektorer

fås genom att lösa $(A-E)x=0$ och $(A+E)x=0$:

$v_1=t(-1,1), t\neq 0$ och $v_2=t(-2,3), t\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^n=PD^nP^{-1} \Rightarrow A^{71}=PD^{71}P^{-1}=PDP^{-1}=A=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}}}$

□