LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMENSSKRIVNING I ENVARIABELANALYS, 5B1047, KTH

2007-08-25

(1) Vi har $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

För kontinuitet i $x=0$ krävs $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$.

Vi har $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = a\cdot 0 + b = b$

och $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ så $\underline{b=1}$.

För deriverbarhet i $x=0$ krävs att höger- och vänsterderivatan i $x=0$ sammanfaller.

Vi har $f'(0^-) = a$ och $f'(0^+) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\Big|_{x\to 0^+} =$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x\cdot x - \sin x\cdot 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$.

Standardutveckling (Taylor) av $\sin x$ för $x\approx 0$

är $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ & $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

$\Rightarrow \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\cos x - \frac{\sin x}{x}\right) \approx$ (då $x\approx 0$)

$\approx \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - 1 + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{120}\right) =$

$= \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{30}\right) = -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{30} \to 0$ då $x\to 0$. Således

har vi $f'(0^+) = f'(0^-)$ om $0 = a$.

Svar: f blir kontinuerlig och deriverbar på $\mathbb{R}$ om $\underline{a=0,\ b=1}$. □

SB4047
25/8-07

② a) $\lim_{x\to -3}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x-12}\right) = \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-4)} =$

$= \lim_{x\to -3}\frac{(x-1)}{(x-4)} = \frac{-4}{-7} = \underline{\underline{4/7}}$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right) =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}\right)} =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2(1-3/x)}+\sqrt{x^2(1+1/x^2)}} =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{x(3-1/x)}{x\sqrt{1+3/x}+x\sqrt{1+1/x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-1/x}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1+1/x^2}} =$

$= \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \underline{\underline{3/2}}.$ □

③ Lite omskrivning ger

$y = \frac{x^2-1}{x-2} = \frac{(x^2-4)+3}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)+3}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} + \frac{3}{(x-2)} =$

$= (x+2) + \frac{3}{(x-2)}$ så vi har en vertikal asymptot

vid $x=2$. Vidare är $y=x+2$ en sned asymptot

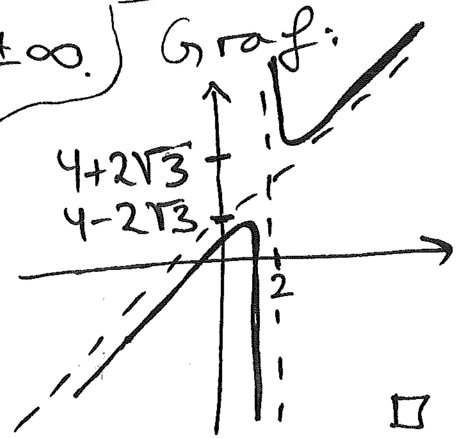
då $x\to\pm\infty$ då $\frac{3}{x-2}\to 0$ då $x\to\pm\infty$.

Derivering ger $y' = 1 - \frac{3}{(x-2)^2}$ så vi har lokala

max- och minvärden $y = 4\pm 2\sqrt{3}$

då $x = 2\mp\sqrt{3}$ (då $y'=0$).

Graf:



□

SB4047
25/8-07

(4) Låt $a_n = \frac{n^2}{(n+1)^3}$ & $b_n = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{(n+1)^3} \Big/ \frac{1}{n} = \frac{n^3}{(n+1)^3} \text{ och } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 1 > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^3} \to \infty, \text{ dvs serien är } \underline{\underline{\text{divergent}}}.$$

ty enl. "comparison test" gäller att om $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ där $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \to \infty$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Ovan är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent (Harmoniska serien). $\square$

(5) Med partialintegration får vi

$$I = \int_1^2 x^2 \cdot \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{9} x^3\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{9} \cdot 8\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \ln 1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{3} \cdot \ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{8}{3} \cdot \ln 2 - \frac{7}{9}}$$

$\square$

(6) $f = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(1) = \sqrt{2}$, $f'(1) = \sqrt{2}/2$ och $f''(1) = \sqrt{2}/4$

$$\Rightarrow P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + E_2(x) =$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) + \frac{\sqrt{2}}{8}(x-1)^2 + E_2(x)}}, \text{ där}$$

resttermen (s mellan 1 och x) $\rightarrow$ $E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x-1)^3 = \underline{\underline{-\frac{1}{4}(1+s^2)^{-5/2}(x-1)^3}}$ $\square$

SB4047
25/8-07

(7) En typisk term i utvecklingen har utseendet $\binom{8}{k}(3x)^k\left(\frac{1}{x}\right)^{8-k} = \binom{8}{k}3^k x^k \cdot \frac{1}{x^{8-k}} =$

$= \binom{8}{k}3^k \cdot x^{2k-8}$ och konstanttermen fås då x har exponent 0, dvs då $2k-8=0 \Leftrightarrow k=4$, och termen blir $\binom{8}{4}3^4 \cdot x^{2\cdot 4-8} = \binom{8}{4}\cdot 3^4 =$

$= \frac{8!}{4!4!}\cdot 3^4 = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 3^4 = \underline{\underline{5670}}.$ $\square$

(8) $V = \pi \cdot \int_a^b x^2(y)\,dy$ där $y(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 = 2-2y \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{2-2y}$
(obs! $x \geq 0$)

Gränserna blir $b = y(0) = 1$ och $a = y(\sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow V = \pi \int_0^1 \sqrt{2-2y}^{\,2}\,dy = \pi\int_0^1 (2-2y)\,dy = \pi\left[2y-y^2\right]_0^1 = \underline{\underline{\pi}}$ $\square$

(9) $y'' - 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Karakteristiska ekvationen: $r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2$

$\Rightarrow$ allmän lösning: $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$. Vidare är

$y'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$ så begynnelsevillkoren ger

$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A = 1/4\ \&\ B = -1/4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)}}$ $\square$

5B4047
25/8-07

(10) Lsg:

Radie $= r$, höjd $= h$

$$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Papperskorgens area ges av funktionen

$$f(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h = \pi r^2 + \frac{2 \cdot V}{r} = \pi r^2 + \frac{20}{r}, \text{ ty } V = 10.$$

Vi ska minimera $f(r)$. Derivering ger

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{20}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{10/\pi} \text{ och}$$

teckenstudium (eller koll av andraderivatan) visar att $f(r)$ antar sitt minsta värde då $r = \sqrt[3]{10/\pi}$

Då blir papperskorgens höjd lika med

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{10}{\pi \cdot (10/\pi)^{2/3}} = \frac{10/\pi}{(10/\pi)^{2/3}} = \left(\frac{10}{\pi}\right)^{1/3} = \underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}}}$$

II