**Matematik KTH**
**Tentamensskrivning Envariabelanalys 5B4047**
Datum: 2007-10-08
Skrivtid: 5 timmar.
Inga hjälpmedel tillåtna.
Varje uppgift ger 3 poäng. Gräns för godkänt: 15 poäng.
Examinator: Mattias Dahl

**1.** Går det att bestämma konstanterna $a$ och $b$ så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x < 2 \\ x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

blir kontinuerlig och deriverbar på hela reella axeln?
Gör det i så fall!

**2. a)** Låt $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2+x-12}$. Beräkna (om de existerar) gränsvärdena

$$\lim_{x\to 3^+} f(x), \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x), \qquad \lim_{x\to 3} f(x).$$

**b).** Beräkna $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - x)$.

**3.** Bestäm samtliga asymptoter till kurvan $y = \frac{2x^4 - x^3}{x^3+8}$.

**4.** Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

är konvergent.

**5.** Beräkna integralen $\int_1^2 x^2 e^{x-1} dx$.

**6.** Bestäm Taylorpolynomet av grad två i origo till funktionen $f(x) = \sqrt{16+x}$ och använd detta för att ge ett närmevärde till $\sqrt{17}$.

**7.** Bestäm koefficienten framför $x$ i (binomial)utvecklingen av $\left(2x + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$.

**8.** Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade område i första kvadranten som ligger mellan $x$-axeln och $y = x\sqrt{4-x}$ roteras ett varv runt $x$-axeln.

**9.** Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$.

**10.** Från vilken punkt på positiva $x$-axeln ser man sträckan mellan punkterna $(0,1)$ och $(0,2)$ på $y$-axeln under maximal vinkel?

**Lycka till!**

# LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMENSSKRIVNING I ENVARIABELANALYS, 5B4047,

2007-10-08

(1) För kontinuitet i $x=2$ krävs att

$f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(2)$. Vi har $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 2+2 = 4$, och

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2^2 + a\cdot 2 + b = 4 + 2a + b$ så vi måste ha

$4 = 4 + 2a + b \Leftrightarrow \underline{2a + b = 0}$, för kontinuitet i $x=2$.

För deriverbarhet i $x=2$ krävs att höger- och vänsterderivatan i $x=2$ sammanfaller. Vi har

$f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x+a) = 4+a$, och $f'(2^+) = 1 \Rightarrow \underline{1 = 4+a}$

$$\begin{cases} 2a+b=0 \\ 4+a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ \underline{b=6} \end{cases} . \square$$

(2) a) $x>3 \Rightarrow |x-3| = x-3$ och $x<3 \Rightarrow |x-3| = -(x-3) = 3-x$.

Vi får $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x-3)}{(x-3)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{(x+4)} = \underline{\underline{1/7}}$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-(x-3)}{(x-3)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-1}{(x+4)} = \underline{\underline{-1/7}}$

Då $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ så <u>existerar ej</u> $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+x+1} - x)(\sqrt{x^2+x+1} + x)}{(\sqrt{x^2+x+1} + x)} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2(1+1/x+1/x^2)} + x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2} + 1} = \dfrac{1}{\sqrt{1}+1} = \underline{\underline{1/2}}$

$\square$

5B4047
8/10-07

③ Polynomdivision ger

$$y = \frac{2x^4 - x^3}{x^3+8} = 2x - 1 + \frac{8-16x}{x^3+8}$$

så vi har en vertikal asymptot då $x = -2$. Vidare är $y = 2x-1$ en sned asymptot då $x \to \pm\infty$ ty

$$\frac{8-16x}{x^3+8} \to 0 \text{ då } x \to \pm\infty$$

($y = kx+m$ är sned asymptot till $f(x)$ då $x \to \infty$ om $f(x) - (kx+m) \to 0$ då $x \to \infty$) □

④ $$\frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3\cdot 3^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$ är en geometrisk summa, och $\left|\frac{2}{3}\right| < 1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} =$$

OBS!

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1/3} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0 =$$

OBS!

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{2/3}}$$, så serien är konvergent. □

⑤ Upprepad partialintegration ger:

$$I = \int_1^2 x^2 \cdot e^{x-1}\,dx = \left[e^{x-1}\cdot x^2\right]_1^2 - \int e^{x-1}\cdot 2x\,dx =$$

$$= \left[e^{x-1}\cdot x^2\right]_1^2 - \left(\left[2e^{x-1}\cdot x\right]_1^2 - \int 2e^{x-1}\cdot 1\,dx\right) =$$

$$= \left[e^{x-1}\cdot x^2 - 2e^{x-1}x\right]_1^2 + 2\int e^{x-1}\,dx =$$

$$= \left[e^{x-1}\cdot x^2 - 2e^{x-1}\cdot x + 2e^{x-1}\right]_1^2 = e\cdot 4 - 4\cdot e + 2e - (1-2+2) = \underline{\underline{2e-1}}$$

□

SB4047
8/10-07

(6) $f(x)=\sqrt{16+x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{16+x}}, \; f''(x)=\dfrac{-1/4}{(16+x)\sqrt{16+x}}.$

$\Rightarrow f(0)=\sqrt{16}=4, \; f'(0)=\dfrac{1}{8}, \; f''(0)=\dfrac{-1}{256} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_2(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}\cdot x+\dfrac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+E_2(x)=$

$=4+\dfrac{x}{8}-\dfrac{x^2}{512}+E_2(x)$ där $E_2(x)=\dfrac{f^{(3)}(s)}{3!}\cdot x^3$ där $0<s<x$.

$\Rightarrow \sqrt{17}=\sqrt{16+1}=f(1)\approx P_2(1)=4+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{512}=$

$=\dfrac{2048}{512}+\dfrac{64}{512}-\dfrac{1}{512}=\dfrac{2111}{512}\approx \underline{4{,}123}$. (Man kollar lätt att $E_2(1)<0.0005$ så 3 decimaler korrekta).

(7) En typisk term i utvecklingen av $\left(2x+\dfrac{2}{x^2}\right)^{10}$ är $\binom{10}{k}(2x)^k\left(+\dfrac{2}{x^2}\right)^{10-k}=$

$=\binom{10}{k}2^k x^k(+2)^{10-k}\cdot\dfrac{1}{x^{20-2k}}=\underline{\binom{10}{k}2^{10}(+1)^{10-k}\cdot x^{3k-20}}$

och exponenten till $x$ blir 1 då $3k-20=1 \Rightarrow k=7$

$\Rightarrow$ koefficienten framför $x$ blir $\binom{10}{7}\cdot 2^{10}(+1)^3=+2^{10}\cdot\binom{10}{7}=$

$=\underline{+2^{13}\cdot 15}$ □

SB4047
8/10-07

(8) $0 \le x \le 4 \Rightarrow$

$$V = \pi\int_0^4 y^2(x)\,dx = \pi\int_0^4 x^2(4-x)\,dx = \pi\int_0^4 (4x^2-x^3)\,dx =$$

$$= \pi\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^4 = \pi\left(\frac{4\cdot 4^3}{3} - \frac{4^4}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{64}{3}\cdot\pi}} \quad \square$$

(9) $y''+6y'+9y=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=1.$

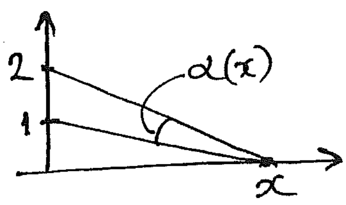
Karakteristisk ekvation: $r^2+6r+9=0 \Rightarrow r=-3$ så den allmänna lösningen blir $y = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}$.

Vidare är $y'(x) = -3Ae^{-3x} + B\cdot e^{-3x} - 3Bxe^{-3x}$,

och begynnelsevillkoren ger: $\begin{cases} A = -1 \\ -3A+B=1 \end{cases} \Rightarrow B=-2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = -(2x+1)e^{-3x}}}. \quad \square$$

(20)




Vi vill maximera funktionen

$$\alpha(x) = \arctan\frac{2}{x} - \arctan\frac{1}{x}, \quad x>0$$

Då $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ får vi

$$\alpha'(x) = \frac{1}{1+\frac{4}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-2}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+1} =$$

$$= \frac{-x^2+2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{-(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+1)(x^2+4)} \Rightarrow \alpha'(x)=0 \text{ då } x=\pm\sqrt{2}$$

men $x>0$ så $\underline{\underline{x=\sqrt{2}}}$ $\square$