Matematik KTH
Tentamensskrivning Envariabelanalys 5B4047
Datum: 080116
Skrivtid: 5 timmar.
Inga hjälpmedel tillåtna.
Varje uppgift ger 3 poäng. Gräns för godkänt: 15 poäng.
Examinator: Mattias Dahl

1. Går det att bestämma konstanterna a och b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ ax + b, & x \leq 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig och deriverbar på hela reella axeln?
Gör det i så fall!

2. Beräkna följande gränsvärden:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 4x^2 + 3x - 2}$. **b)** $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

3. Bestäm samtliga asymptoter till $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 14}{x - 5}$ samt lokala max- och minpunkter. Skissera grafen!

4. Avgör om serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(\sqrt{5})^n}$$

är konvergent.

5. Beräkna integralen $\int_0^{\pi} x^2 \sin(2x) dx$.

6. Bestäm med hjälp av Taylorutveckling konstanten $a > 0$ så att gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a + 2x} - \sqrt{a + x} - x}{x^2}$$

existerar ändligt. Vad blir detta gränsvärde?

7. Bestäm koefficienten framför x^8 i (binomial)utvecklingen av $\left(x + \frac{2}{x}\right)^{12}$.

8. Betrakta rotationsytan som uppstår då kurvan $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$ roterar kring x-axeln. Beräkna arean!

9. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 8y + 16 = 0$, $y(0) = 3, y'(0) = 8$.

10. En rektangel har sin bas på x-axeln och sina övre hörn på kurvan $y = 1 - x^2$. Bestäm värdet på den maximala area en sådan rektangel kan ha.

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMENSSKRIVNING I ENVARIABELANALYS, 5B4047.

① $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ ax + b, & x \leq 0. \end{cases}$

För kontinuitet i $x = 0$ krävs $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = a \cdot 0 + b = b$ & $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

För deriverbarhet krävs att höger = vänsterderivatan i $x = 0$.

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = a$ och $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln x = \frac{1}{x} \Rightarrow a = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{a}$

Så vi kan <u>inte</u> finna konstanter a & b så att f blir kontinuerlig och deriverbar på hela $\mathbb{R}$.

② a) $$\frac{(x^4 - 16)}{(x^3 + 4x^2 + 3x - 2)} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x + 2)(x^2 + 2x - 1)} = \frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{(x+2)(x^2+2x-1)} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 4x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)(x^2+4)}{(x^2 + 2x - 1)} = \frac{(-4) \cdot 8}{-1} = \underline{\underline{32}}$$

b) $$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{1 + 1/x} + 1)} = 0. \quad \square$$

(3) $f(x) = \frac{x^2-2x-14}{x-5}$.

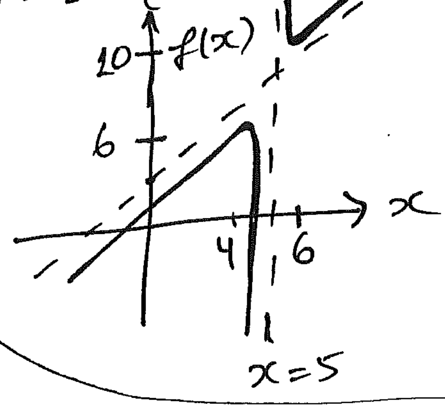
Omskrivning ger $f(x) = \frac{x^2-2x-14}{x-5} = \frac{(x+3)(x-5)+1}{x-5} =$

$= x+3+\frac{1}{x-5}$ så vi har en vertikal asymptot i $x=5$. Vidare är $y=x+3$ en sned asymptot då $x \to \pm\infty$ ty $\frac{1}{x-5} \to 0$ då $x \to \pm\infty$

(Minns att $y=kx+m$ är sned asymptot till $f(x)$ då $x\to\infty$ om $f(x)-(kx+m) \to 0$ då $x \to \infty$).

$y'(x) = 1 - \frac{1}{(x-5)^2}$ då $x \neq 5 \Rightarrow y'(x)=0$ då $x=4$ & $x=6$

och $y(4)=6$ (lokalt max) & $y(6)=10$ (lokalt min)



(4) $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{5}^n}$ är en konvergent geometrisk serie, ty

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{5}^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n = 2\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}.$$

$\left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right| < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ om $|a|<1$

SB4047

(5) Med partialintegration får vi

$$I = \int_0^\pi x^2 \cdot \sin(2x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\cos 2x \cdot x^2\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{2}\cdot\cos(2x)\cdot 2x\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}\cdot\cos 2x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos 2x \cdot x\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}\cdot\cos 2x\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{2}\sin 2x \cdot x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin 2x \cdot 1\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}\cdot\cos 2x\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{2}\sin 2x \cdot x\right]_0^\pi + \left[\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^\pi = \underline{\underline{-\pi^2/2}} \quad \square$$

(6) Med Taylorutveckling är $(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + t^3 B_1(t)$ där $B_1(t)$ är begränsad för t nära 0, och använder vi detta på $\left(1+\frac{2x}{a}\right)^{1/2}$ och $\left(1+\frac{x}{a}\right)^{1/2}$ får vi:

$$\frac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{a+x} - x}{x^2} = \frac{\sqrt{a}\left(\left(1+\frac{2x}{a}\right)^{1/2} - \left(1+\frac{x}{a}\right)^{1/2}\right) - x}{x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{a} - \frac{1}{8}\left(\frac{2x}{a}\right)^2 + x^3 B_2(x) - \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a} - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{a}\right) + x^3 B_3(x)\right)\right) - x}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{a}} - 1\right)x - \frac{3}{8}\cdot\frac{x^2}{a\sqrt{a}} + x^3 B_4(x)}{x^4} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{a}} - 1\right)}{x} - \frac{3}{8a\sqrt{a}} + x B_4(x)$$

Första termen har gränsvärde då $x \to 0$ precis då $\frac{1}{2\sqrt{a}} - 1 = 0 \iff \underline{a = 1/4}$. De andra två termerna har gränsvärde oberoende av a, ty B_4 är begränsad för x nära 0.

Gränsvärdet blir $-\frac{3}{8a\sqrt{a}} = \frac{-3}{8\frac{1}{4}\sqrt{1/4}} = \frac{-3}{2\cdot 1/2} = \boxed{-3}$ $\square$

SB4047

(7) En typisk term i utvecklingen av

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^{12}$ har utseendet

$$\binom{12}{k}x^k\left(\frac{2}{x}\right)^{12-k} = \binom{12}{k}x^k \cdot \frac{2^{12-k}}{x^{12-k}} = \binom{12}{k}x^{2k-12}\cdot 2^{12-k}, \text{ och}$$

x har exponent 8 då $2k-12=8 \Leftrightarrow k=10 \Rightarrow$

x^8-termen blir $\binom{12}{10}x^{2\cdot 10-12}\cdot 2^{12-10} = \binom{12}{10}\cdot 2^2 \cdot x^8$ så

koefficienten är $\binom{12}{10}\cdot 2^2 = \frac{12!}{10!\,2!}\cdot 4 = \frac{11\cdot 12}{2}\cdot 4 = \underline{\underline{264}}$ ◻

(8) $$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{x+1/4}\,dx = 2\pi\left[\frac{(x+1/4)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)}}$$ ◻

(9) $y''-8y+16=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=8.$

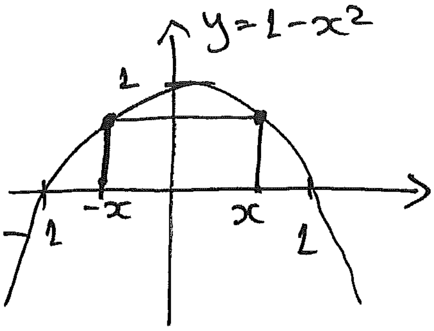
Karakteristiska ekvationen: $r^2-8r+16=0 \Rightarrow r=4$ så den allmänna lösningen är $y=Ae^{4x}+Bxe^{4x}$, vidare är

$y'(x)=4Ae^{4x}+Be^{4x}+4Bxe^{4x}$ så $y(0)=3$ och $y'(0)=8$

ger $\begin{cases} A=3 \\ 4A+B=8 \Rightarrow B=-4 \end{cases} \Rightarrow y=\underline{\underline{3e^{4x}-4xe^{4x}}}$. ◻

SB4047

(20)



Låt $(x,0)$ beteckna rektangelns nedre högra hörn (så $x>0$). Av symmetriskäl gäller $(-x,0)$ är rektangelns nedre vänstra hörn (ty $y=1-x^2$ symmetrisk kring y-axeln). Arean ges av $A(x) = 2x \cdot y(x) = 2x(1-x^2) = \underline{2x-2x^3}$.

$A'(x) = 2-6x^2$ och $A'(x)=0$ då $\underline{x = 1/\sqrt{3}}$ (vi antog $x>0$). Studium av andraderivatan i $x = 1/\sqrt{3}$ eller teckenstudium av derivatan visar att $A(x)$ har maximum då $x = 1/\sqrt{3}$, och den maximala arean är

$$A(1/\sqrt{3}) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}^3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3\sqrt{3}}}}. \quad \square$$