

Matematik KTH

Tentamensskrivning Envariabelanalys 5B4047

Datum: 2007-10-08

Skrivtid: 5 timmar.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Varje uppgift ger 3 poäng. Gräns för godkänt: 15 poäng.

Examinator: Mattias Dahl

1. Går det att bestämma konstanterna a och b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x < 2 \\ x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

blir kontinuerlig och deriverbar på hela reella axeln?

Gör det i så fall!

2. a) Låt $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2+x-12}$. Beräkna (om de existerar) gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

b). Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$.

3. Bestäm samtliga asymptoter till kurvan $y = \frac{2x^4 - x^3}{x^3 + 8}$.

4. Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

är konvergent.

5. Beräkna integralen $\int_1^2 x^2 e^{x-1} dx$.

6. Bestäm Taylorpolynomet av grad två i origo till funktionen $f(x) = \sqrt{16+x}$ och använd detta för att ge ett närmevärde till $\sqrt{17}$.

7. Bestäm koefficienten framför x i (binomial)utvecklingen av $\left(2x + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$.

8. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade område i första kvadranten som ligger mellan x -axeln och $y = x\sqrt{4-x}$ roteras ett varv runt x -axeln.

9. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

10. Från vilken punkt på positiva x -axeln ser man sträckan mellan punkterna $(0, 1)$ och $(0, 2)$ på y -axeln under maximal vinkel?

Lycka till!

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMENS- SKRIVNING I ENVARIABELANALYS, SB4047, 2007-10-08

① För kontinuitet i $x=2$ krävs att

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x). \text{ Vi har } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 2+2=4, \text{ och}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 + a \cdot 2 + b = 4 + 2a + b \text{ så vi måste ha}$$

$$4 = 4 + 2a + b \Leftrightarrow \underline{2a + b = 0}, \text{ för kontinuitet i } x=2.$$

För deriverbarhet i $x=2$ krävs att höger- och vänsterderivatan i $x=2$ sammanfaller. Vi har

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + a) = 4 + a, \text{ och } f'(2^+) = 1 \Rightarrow \underline{1 = 4 + a}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 4 + a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \end{cases} \quad \square$$

②^{a)} $x > 3 \Rightarrow |x-3| = x-3$ och $x < 3 \Rightarrow |x-3| = -(x-3) = 3-x$.

$$\text{Vi får } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)}{(x-3)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x+4)} = \underline{\underline{1/7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{(x+4)} = \underline{\underline{-1/7}}$$

Da $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ så existerar ej $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2(1+1/x+1/x^2)} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+1} + 1} = \underline{\underline{1/2}} \quad \square$$

③ Polynomdivision ger

5B4047
8/10-07

$$y = \frac{2x^4 - x^3}{x^3 + 8} = 2x - 1 + \frac{8 - 16x}{x^3 + 8}$$

så vi har en vertikal asymptot då $x = -2$. Vidare är

$y = 2x - 1$ en sned asymptot då $x \rightarrow \pm\infty$ ty

$$\frac{8 - 16x}{x^3 + 8} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \pm\infty$$

($y = kx + m$ är sned asymptot till $f(x)$ då $x \rightarrow \infty$ om $f(x) - (kx + m) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$)

④ $\frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3 \cdot 3^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ är en

geometrisk summa, och $\left|\frac{2}{3}\right| < 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} =$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1/3} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{2/3}}, \text{ så serien är konvergent. } \square$$

⑤ Upprepad partialintegration ger:

$$I = \int_1^2 x^2 \cdot e^{x-1} dx = \left[e^{x-1} \cdot x^2 \right]_1^2 - \int_1^2 e^{x-1} \cdot 2x dx =$$

$$= \left[e^{x-1} \cdot x^2 \right]_1^2 - \left(\left[2e^{x-1} \cdot x \right]_1^2 - \int_1^2 2e^{x-1} \cdot 1 dx \right) =$$

$$= \left[e^{x-1} \cdot x^2 - 2e^{x-1} \cdot x \right]_1^2 + 2 \int_1^2 e^{x-1} dx =$$

$$= \left[e^{x-1} \cdot x^2 - 2e^{x-1} \cdot x + 2e^{x-1} \right]_1^2 = e \cdot 4 - 4 \cdot e + 2e - (1 - 2 + 2) = \underline{\underline{2e - 1}} \quad \square$$

5B4047
8/10-07

$$(6) f(x) = \sqrt{16+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{16+x}}, f''(x) = \frac{-1/4}{(16+x)\sqrt{16+x}}$$

$$\Rightarrow f(0) = \sqrt{16} = 4, f'(0) = \frac{1}{8}, f''(0) = \frac{-1}{256} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + E_2(x) =$$

$$= 4 + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{512} + E_2(x) \text{ där } E_2(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!} \cdot x^3 \text{ där } 0 < s < x.$$

$$\Rightarrow \sqrt{17} = \sqrt{16+1} = f(1) \approx P_2(1) = 4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{512} =$$

$$= \frac{2048}{512} + \frac{64}{512} - \frac{1}{512} = \frac{2111}{512} \approx \underline{\underline{4,123}}. \text{ (Man kollar lätt att } E_2(1) < 0,0005 \text{ så } 3 \text{ decimaler korrekta).}$$

(7) En typisk term i utvecklingen

$$\text{av } \left(2x - \frac{2}{x^2}\right)^{10} \text{ är } \binom{10}{k} (2x)^k \left(-\frac{2}{x^2}\right)^{10-k} =$$

$$= \binom{10}{k} 2^k x^k (-2)^{10-k} \cdot \frac{1}{x^{20-2k}} = \underline{\underline{\binom{10}{k} 2^{10} (-1)^{10-k} \cdot x^{3k-20}}}$$

och exponenten för x blir 1 då $3k-20=1 \Rightarrow k=7$

$$\Rightarrow \text{koefficienten framför } x \text{ blir } \binom{10}{7} \cdot 2^{10} (-1)^3 = -2^{10} \cdot \binom{10}{7} =$$

$$= \underline{\underline{-2^{13} \cdot 15}} \quad \square$$

⑧ $0 \leq x \leq 4 \Rightarrow$

$$V = \pi \int_0^4 y^2(x) dx = \pi \int_0^4 x^2(4-x) dx = \pi \int_0^4 (4x^2 - x^3) dx =$$

$$= \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{4 \cdot 4^3}{3} - \frac{4^4}{4} \right) = \frac{64 \cdot \pi}{3} \quad \square$$

⑨ $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 1.$

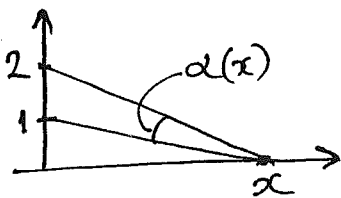
Karakteristisk ekvation: $r^2 + 6r + 9 = 0 \Rightarrow r = -3$ så
den allmänna lösningen blir $y = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}$.

Vidare är $y'(x) = -3Ae^{-3x} + B \cdot e^{-3x} - 3Bxe^{-3x}$,

och begynnelsevillkoren ger: $\begin{cases} A = -1 \\ -3A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow B = -2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = -(2x+1)e^{-3x}}}. \quad \square$$

⑩



Vi vill maximera funktionen
 $\alpha(x) = \arctan \frac{2}{x} - \arctan \frac{1}{x}, x > 0$

Da $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ får vi

$$\alpha'(x) = \frac{1}{1 + \frac{4}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^2} \right) - \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{-2}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+1} =$$

$$= \frac{-x^2+2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{-(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+1)(x^2+4)} \Rightarrow \alpha'(x) = 0 \text{ då } x = \pm\sqrt{2}$$

men $x > 0$ så $x = \sqrt{2}$ $\square$