Matematik KTH
Tentamensskrivning Flervariabelanalys 5B4048
Datum: 2007-10-15
Skrivtid: 5 timmar.
Inga hjälpmedel tillåtna.
Varje uppgift ger 3 poäng. Gräns för godkänt: 15 poäng.
Examinator: Mattias Dahl

1. Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna det i så fall:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

2. Tangentplanet i $(0,0,0)$ till ytan $z = f(x,y)$ har ekvationen $x+y+z=0$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = (2+f(x,y))^2$ i $x=y=0$.

3. Beräkna riktningsderivatan av funktionen

$$f(x,y,z) = \frac{(x^2+y^2)z}{2-z^2}$$

i punkten $(-1,2,1)$ i riktningen *mot* punkten $(0,4,-1)$.

4. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = (1-x^2-y^2)e^{-x-y}$ då $x^2+y^2 \leq 2$.

5. Låt D vara det inre av enhetscirkeln och beräkna dubbelintegralen

$$\int\int_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}dxdy.$$

6. Låt Y vara ytan $z = x^2+y^2, \quad z \leq 1$. Skissera ytan och beräkna arean av Y!

7. Låt $F = (x^3-3xy^2, y^3-3x^2y)$ vara ett kraftfält i $\mathbb{R}^2$. Beräkna $\int_\gamma F\cdot dr$ där γ är kurvan $y=\sqrt{x}$ från origo till $(1,1)$.

8. Bestäm den enkla slutna och moturs orienterade kurva γ som gör integralen $I = \int_\gamma y^3dx + (3x-x^3)dy$ så stor som möjligt.

9. Beräkna flödet av fältet $F = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2}$ ut genom cylindern $\{(x,y,z) : x^2+y^2=2, -2\leq z\leq 2\}$.

10. Låt $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ beteckna den sk Laplaceoperatorn. Visa att:
a) $\nabla\cdot(\nabla f) = \triangle f$
b) $\nabla\times(\nabla f) = 0$.

Lycka till!

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMENSSKRIVNING I FLERVARIABELANALYS, 5B4048, 15/10-07.

(1) Vi närmar oss (0,0) dels längs linjen $x=y$ och dels längs linjen $y=0$.

$$f(x,x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}} \text{ då } x\to 0$$

$$f(x,0)=\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=\underline{\underline{0}} \text{ då } x\to 0.$$ Gränsvärdet existerar ej!

(2) $x+y+z=0 \Rightarrow z=-x-y=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$ och $f(0,0)=0.$

$F(x,y)=(2+f(x,y))^2 \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2(2+f(x,y))\cdot\frac{\partial f}{\partial x} \quad \& \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2(2+f(x,y))\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=2(2+f(x,y))\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=2(2+0)(-1)=-4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=2(2+f(x,y))\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2(2+0)(-1)=-4$$

Vidare är $F(0,0)=(2+f(0,0))^2=(2+0)^2=4$

$$\Rightarrow z=F(0,0)+\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\cdot x+\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\cdot y=\underline{\underline{4-4x-4y}}$$

5B4048
15/10-07

(3) $f_v' = \operatorname{grad} f \cdot v$, där

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{2xz}{2-z^2}, \frac{2yz}{2-z^2}, \frac{(x^2+y^2)}{(2-z^2)} + \frac{2z^2(x^2+y^2)}{(2-z^2)^2}\right)$$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(-1,2,1) = (-2,4,15)$.

Riktningen ges av $(0,4,-1)-(-1,2,1) = (1,2,-2)$

och normerar vi vektorn får vi $v = \frac{1}{3}(1,2,-2)$

$\Rightarrow f_v'(-1,2,1) = \operatorname{grad} f(-1,2,1) \cdot \frac{1}{3}(1,2,-2) =$

$= (-2,4,15)\cdot\frac{1}{3}(1,2,-2) = \frac{1}{3}(-2+8-30) = -\frac{24}{3} = \underline{\underline{-8}}$ □

(4) $f_x'(x,y) = (x^2+y^2-1-2x)\cdot e^{-x-y}$ och

$f_y'(x,y) = (x^2+y^2-1-2y)\cdot e^{-x-y}$.

Kritiska punkter då $f_x' = f_y' = 0$, dvs då $(e^{-x-y} \neq 0)$

$$\begin{cases} x^2+y^2-1-2x=0 \\ x^2+y^2-1-2y=0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}, \text{ men bara}$$

punkten $(x,y) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ ligger i området, och

$f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{(\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}-1}}$. Randen kan vi parametrisera med $(x,y) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) \Rightarrow f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) =$

$= (1-2\cos^2 t - 2\sin^2 t)e^{-(\sqrt{2}\cos t + \sqrt{2}\sin t)} = -e^{-\sqrt{2}(\cos t + \sin t)}$.

När t varierar mellan 0 & 2π så varierar $\cos t + \sin t$ mellan $-\sqrt{2}$ och $+\sqrt{2}$ $\Rightarrow f$ varierar mellan $\underline{-e^2}$ och $\underline{-e^{-2}}$

Således har f största värdet $(\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}-1}$ och minsta värdet $-e^2$. □

SB4048

15/10-07

(5) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$

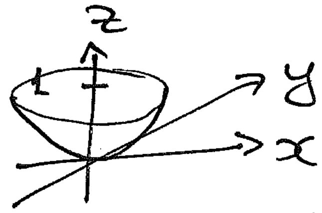
$$\Rightarrow \iint_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \iint_D \frac{(r\cos\theta + r\sin\theta)^2}{1+r^2}\cdot r\,dr\,d\theta =$$

$$= \iint_D \frac{r^3(1+2\sin\theta\cos\theta)\,dr\,d\theta}{1+r^2} = \int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2}\,dr \cdot \int_0^{2\pi}(1+2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^1 \left(r - \frac{r}{1+r^2}\right)dr \left[\theta + \sin^2\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\ln(1+r^2)\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\ln 2\right] = \underline{\underline{\pi(1-\ln 2)}} \quad \square$$

(6) Y är en paraboloid:



$A = \iint_Y dS$ där $dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$ där

$f(x,y) = z = x^2+y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ & $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow$

$\Rightarrow dS = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$. Med $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ får vi

med $D = \{(x,y) = x^2+y^2 \le 1\}$ for arean

$$A = \iint_Y dS = \iint_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4r^2+1}\cdot r\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{4r^2+1}\cdot r\,dr = 2\pi\left[\frac{(4r^2+1)^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{8}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)}} \quad \square$$

5B4048
15/10-07

(7) $\mathcal{F}$ är konservativt då det finns en potentialfunktion ϕ till $\mathcal{F}$ sådan att

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = x^3 - 3xy^2 & (1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = y^3 - 3x^2 y & (2) \end{cases}$$

Vi integrerar (2) m. avs. på y och får

$\phi(x,y) = \frac{y^4}{4} - 3x^2\frac{y^2}{2} + \varphi(x)$, och om vi deriverar

detta m. avseende på x och jämför med (1) får

vi: $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{6xy^2}{2} + \varphi'(x) = x^3 - 3xy^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = x^3 \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x^4}{4} + C$$

& således är $\boxed{\phi(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + C}$

där C = konstant.

Då $\mathcal{F}$ är konservativt är kurvintegralen oberoende av integrationsvägen och vi får

$$\int_\gamma \mathcal{F} \cdot dr = \phi(1,1) - \phi(0,0) = \frac{1^4}{4} - \frac{3 \cdot 1^2 \cdot 1^2}{2} + \frac{1^4}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \boxed{-1}$$

$\square$

5B4048
15/10-07

(8) $P(x,y) = y^3$, $Q(x,y) = 3x - x^3$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 - 3x^2 - 3y^2$. Greens formel ger

$$I = \int_\gamma y^3 dx + (3x - x^3)dy = \iint_D 3(1 - x^2 - y^2)dxdy.$$

Vi ser att om $f(x,y) = 3(1-x^2-y^2) \geq 0$ i D är $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$. Om $f(x,y) \leq 0$ i D blir dubbelintegralen däremot negativ.

Det största område där $f(x,y) = 3(1-x^2-y^2)$ är positiv är enhetsskivan, så integralen blir störst då $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ så γ = enhetscirkeln. □

(9) Utåtriktad enhetsnormal till cylinderytan $x^2+y^2=2$ är $N = \frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x,y,0)$.

På cylinderytan är $F = \frac{1}{2}(x,y,z)$ och

$$F \cdot N = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x,y,z)\cdot(x,y,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x^2+y^2) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ flödet ut genom cylinderytan Y blir

$$\iint_Y F\cdot N\,dS = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_Y dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{Area}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi\sqrt{2}\cdot 4 = \underline{\underline{8\pi}}$$ □

SB4048
15/10-07

(10) a) $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \Rightarrow \underline{\nabla \cdot (\nabla f)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \underline{\Delta f.}$$

b) $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) i + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) j + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) k =$$

$$= \underline{0}$$

□