Lösningsförslag till tentamen i 5B1105, Differential- och Integralkalkyl I, del 2, 2002-04-10.

1. Punkten P ligger på ytan eftersom $F(2,3,6)=0$. Tangentplanets normal $\mathbf{n}$ är parallell med gradienten $\nabla F(2,3,6)$. Man har

$$f'_x(2,3,6) = 1 - \frac{x}{r}\Big|_{(2,3,6)} = \frac{5}{7}, \quad f'_y(2,3,6) = 1 - \frac{y}{r}\Big|_{(2,3,6)} = \frac{4}{7}, \quad f'_z(2,3,6) = 1 - \frac{z}{r}\Big|_{(2,3,6)} = \frac{1}{7},$$

där $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Tag $\mathbf{n} = (5,4,1)$. Tangentplanets ekvation ges då av

$$5(x-2)+4(y-3)+(z-6)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad 5x+4y+z=28.$$

Svar: Tangentplanets ekvation är: $5x+4y+z=28.$

---

2. Ändpunkterna $(1,0,1)$ och $(-e^\pi, 0, e^\pi)$ fås för $t=0$ respektive $t=\pi$. Längden av kurvan mellan de två punkterna ges av

$$\int_0^\pi |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^\pi \sqrt{[e^t(\cos t - \sin t)]^2 + e^t(\sin t + \cos t)]^2 + e^{2t}}\,dt = \sqrt{3}\int_0^\pi e^t\,dt.$$

Svar: $\sqrt{3}\,(e^\pi - 1).$

---

3. Funktionen f är kontinuerlig, punktmängden är kompakt $\Longrightarrow$ max och min nås. Eftersom ellipsen dessutom är en sluten regulär kurva, finns de ovannämnda extrema bland de kritiska punkterna på ellipsen.

Vi betecknar med $g(x,y) = x^2+2y^2-9$ och använder Lagranges multiplikatormetod. I de kritiska punkterna på ellipsen är $\begin{cases} \nabla f &= \lambda \nabla g \\ g &= 0 \end{cases}$ eller $\begin{cases} \nabla g &= 0 \\ g &= 0 \end{cases}$. Det andra systemet saknar lösningar eftersom $\nabla g(x,y)=0$ endast i origo som tillhör ej ellipsen ($g(0,0) = -9 \neq 0$). Således återstår fallet då $\nabla f = \lambda \nabla g$ (dvs de båda gradienterna är parallella):

$$\begin{cases} f'_x = \lambda g'_x \\ f'_y = \lambda g'_y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 4(y-2x)=0 \Longleftrightarrow y = 2x.$$

Substitution i den andra ekvationen ger $0 = g(x,2x) = x^2 + 2\cdot 4x^2 - 9$, dvs $(x,y) = \pm(1,2)$. Slutligen är $f(\pm(1,2)) = \pm 9$.

Svar: $f_{\max} = f(1,2) = 9$, $f_{\min} = f(-1,-2) = -9.$

---

4. Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{v}{u^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(-\frac{u}{v^2}\Big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(-\frac{1}{u}\Big).$$

Detta ger

$$u\frac{\partial z}{\partial u} + v\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{u}{v} - \frac{u}{v}\Big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(\frac{v}{u} - \frac{v}{u}\Big) = 0.$$

---

5. Beteckna fältets komponenter med $P(x,y)$ och $Q(x,y)$. Vi använder Greens sats:

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{r} = \iint_\Omega \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dxdy = \iint_\Omega \Big(\arctan\frac{y}{x} + \frac{x}{1+(y/x)^2}\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) + \arctan\frac{y}{x} + \frac{y}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}\Big)\,dxdy$$
$$= 2\iint_\Omega \arctan\frac{y}{x}\,dxdy = 2\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \varphi\cdot r\,drd\varphi = 2\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^1\Big[\frac{\varphi^2}{2}\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32}.$$

Svar: $\frac{\pi^2}{32}.$

---

6. I kan skrivas som en dubbelintegral över ett triangulärt område D med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(2,1)$:

$$I = \int_0^1\Big(\int_{2y}^2 e^{x^2}\,dx\Big)\,dy = \iint_D e^{x^2}\,dxdy, \qquad D = \{(x,y)\,:\,2y \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}.$$

Området D kan alternativt beskrivas som

$$D = \{(x,y)\,:\,0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{x}{2}\}.$$

Omkastning av integrationsordningen ger

$$I = \int_0^2 \int_0^{x/2} e^{x^2}\, dydx = \int_0^2 e^{x^2} \left(\int_0^{x/2} dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{4}(e^4 - 1).$$

$$\boxed{\textbf{Svar: } I = \frac{1}{4}(e^4 - 1).}$$

---

7. Gradienten är definierad endast för skalärfält och divergens samt rotation är definierade endast för vektorfält. Av de uppräknade uttrycken har därmed endast 'rot grad f' mening. Man har

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}(x^2 y - x\sin z - e^y) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy - \sin z & x^2 - e^y & -x\cos z \end{vmatrix} = (0\,,\, -\cos z + \cos z\,,\, 2x - 2x) = 0\,.$$

$$\boxed{\textbf{Svar: } \text{Endast rot grad } f \text{ har mening, rot grad } f = 0.}$$

---

8. Beteckna med S_1 den delen av planet $z = 1$ som ligger innanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$, med S_2 den delen av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ som ligger under planet $z = 1$ och med V den kropp som avgränsas av S_1 och S_2. Vi använder Gauss' sats:

$$\iint\limits_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint\limits_V (y + 2z)\, dV.$$

Projektionen av skärningskurvan mellan planet och paraboloiden på xy-planet fås ur $z = 1 = x^2 + y^2$, dvs är randen till cirkelskivan $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Då ges det sökta flödet av ($\iiint\limits_V y\, dV = 0$ pga symmetri)

$$\iint\limits_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint\limits_D \Big(\int\limits_{x^2+y^2}^{1} 2z\, dz \Big)\, dxdy = \iint\limits_D \Big(1 - (x^2 + y^2)^2 \Big)\, dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^4) \cdot r\, dr = 2\pi \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Big) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\boxed{\textbf{Svar: } \text{Det sökta flödet är } \frac{2\pi}{3}.}$$

---

9. På skärningskurvan mellan planet och paraboloiden är $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 1 - x - y$. Kvadratkomplettering visar att skärningskurvans projektion på xy-planet är cirkeln $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Då är

$$V = \iint\limits_{(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 4} \Big(\int\limits_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{1-x-y} dz \Big)\, dxdy = \frac{1}{2} \iint\limits_{(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 4} \Big(4 - (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \Big)\, dxdy\,.$$

Byte till polära koordinater $\begin{cases} x + 1 = r\cos\varphi \\ y + 1 = r\sin\varphi \end{cases}$ ger

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) \cdot r\, drd\varphi = \frac{1}{2} \Big(\int_0^{2\pi} d\varphi \Big) \Big(\int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr \Big) = \pi \Big[2r^2 - \frac{r^4}{4} \Big]_0^2 = 4\pi.$$

$$\boxed{\textbf{Svar: } V = 4\pi.}$$

---

10. a) Eftersom $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 - xy\cos(xyz)$ så är $F'_z(0, 0, 0) = 1 \neq 0$. Detta, enligt implicita funktionssatsen, är ett tillräckligt villkor för att ekvationen $F(x, y, z) = 0$ skall definiera z lokalt som en funktion $z = f(x, y)$ i någon omgivning av origo så att $f(0, 0) = 0$. De partiella derivatorna i origo ges nu av:

$$f'_x(0, 0) = -\frac{F'_x(0, 0, 0)}{F'_z(0, 0, 0)} = -\left. \frac{1 - yz\cos(xyz)}{1 - xy\cos(xyz)} \right|_{(0,0,0)} = -1$$

$$f'_y(0, 0) = -\frac{F'_y(0, 0, 0)}{F'_z(0, 0, 0)} = -\left. \frac{1 - xz\cos(xyz)}{1 - xy\cos(xyz)} \right|_{(0,0,0)} = -1.$$

b) En normalvektor $\mathbf{n}$ till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(0, 0, 0)$ ges av $\mathbf{n} = (-f'_x(0,0), -f'_y(0,0), 1) = (1, 1, 1)$. Normalvektorn $\mathbf{n}$ är även riktningsvektor till den sökta normallinjen L till ytan i denna punkt. En parameterframställning av normalen är således $L : (x, y, z) = (0, 0, 0) + t\mathbf{n} = t(1, 1, 1),\ t \in \mathbb{R}$.

c) Riktningsderivatan $D_{\mathbf{v}} f = f'_{\mathbf{v}}$ i punkten $(0, 0)$ ges av

$$f'_{\mathbf{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{v} = |\nabla f(0,0)|\,|\mathbf{v}| \cos\vartheta$$

där $|\mathbf{v}| = 1$ och ϑ är vinkeln mellan $\nabla f(0, 0)$ och $\mathbf{v}$. Därmed får riktningsderivatan sitt största värde för $\vartheta = 0$:

$$f'_{\mathbf{v}}(0,0) \le |\nabla f(0,0)| = |(-1,-1)| = \sqrt{2}.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{b) } (x,y,z) = t(1,1,1);\ \text{c) } \sqrt{2}.}$

---

11. Funktionen $f(x, y) = (4x^2 + axy + y^2)(x + a)$ är ett polynom som sammanfaller med sin Taylorutveckling kring origo. Eftersom termer av ordning 1 saknas, så är $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ och därmed är origo en kritisk punkt för alla värden på konstanten a. Man utläser även de andra derivatorna:

$$A = f''_{xx}(0,0) = 8a, \qquad B = f''_{xy}(0,0) = a^2, \qquad C = f''_{yy}(0,0) = 2a.$$

Därmed är

$$AC - B^2 = a^2(16 - a^2) \implies \begin{cases} -4 < a < 0 & \text{medför att origo är en lokal maximipunkt;} \\ 0 < a < 4 & \text{medför att origo är en lokal minimipunkt;} \\ |a| > 4 & \text{medför att origo är en sadelpunkt.} \end{cases}$$

Slutligen har man för $a = 0$ och $a = \pm 4$ (notera att $f(x, y) = f(x, y) - f(0, 0)$ eftersom $f(0, 0) = 0$):

$$a = \begin{cases} -4 & , f(x,y) = (2x-y)^2(x-4) \le 0 \text{ i en omg. av origo, dvs origo är ett (icke-strängt) lok. max.} \\ 0 & , f(x,y) = x(4x^2+y^2), \text{ dvs origo är en sadelpunkt ty } f \text{ växlar tecken i varje omg. av origo} \\ 4 & , f(x,y) = (2x+y)^2(x+4) \ge 0 \text{ i en omg. av origo, dvs origo är ett (icke-strängt) lok. min.} \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{Lokal maximipunkt för } -4 \le a < 0 \text{ och lokal minimipunkt för } 0 < a \le 4.}$

---

12. a) På y-axeln är $f(0, y) = 0$. Alla andra linjer genom origo skrivs på formen $y = kx$ för något k och då är

$$f(x, kx) = \frac{k^3x^5}{x^4 + x^4(1+k^3x)^2} = \frac{k^3x}{1 + (1+k^3x)^2} = \mathcal{O}(x) \to 0,\ x \to 0.$$

b) Funktionen f är kontinuerlig i origo om $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$. Om man närmar sig origo t. ex. längs kurvan $y = -x^{2/3}$ ($y^3 = -x^2$) får man ett annat (observera, endimensionellt) gränsvärde än i deluppgift a):

$$f(x, -x^{2/3}) = -\frac{x^4}{x^4} = -1 \ne 0.$$

Därmed existerar inte gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, dvs f är inte kontinuerlig i origo.

c) Trots att f inte är kontinuerlig i origo, existerar de partiella derivatorna $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$:

$$f'_x(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{b) } f \text{ är inte kontinuerlig i origo; c)} f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0.}$
