Lösningsförslag till tentamenskrivning, 2007-05-24, kl. 14.00-19.00
5B1148, flervariabelanalys för IT och ME (5p)

1. Vi har $f(x,y) = \dfrac{2x-y}{3y-5x}$ vilket ger $f_x' = \dfrac{y}{(3y-5x)^2}$ och $f_y' = -\dfrac{x}{(3y-5x)^2}$.

I punkten (1,2) fås
$f_x'(2,1) = 2$, $f_y'(2,1) = -1$ och grad $f(1,2) = (2,-1)$.
Riktningen från punkten (1,2) mot punkten (4,–2) ges av vektorn $\boldsymbol{u} = (3,-4)$ vars längd är $|\boldsymbol{u}| = 5$. Enhetsvektorn $\hat{\boldsymbol{u}} = (3/5, -4/5)$ har samma riktning som $\boldsymbol{u}$.
För den sökta riktningsderivatan gäller att $f_{\mathbf{u}}'(1,2) = \hat{\boldsymbol{u}}\cdot$grad $f(1,2) = (3/5, -4/5)\cdot(2,-1 = 2$.

Det maximala värdet för $f_{\mathbf{v}}'(1,2)$ fås då $\boldsymbol{v}$ har samma riktning som grad $f(1,2)$ och det maximala värdet är |grad $f(1,2)| = \sqrt{5}$.

$\boxed{\textbf{Svar: } 2,\ (2,-1) \text{ och } \sqrt{5}.}$

2.a) $\mathbf{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1/x & -1/y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{f}'(1,1)) = -2 \neq 0.$

2.b) inversens Jacobimatris svarande mot (1,1) är

$\mathbf{f}(1,1) = (1, \ln(1)) = (1,0)$

$$\left(\mathbf{f}^{-1}(1,0)\right)' = \left(\mathbf{f}'(1,1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ där } (1,0) \text{ svar mot } (1,1).$$

---

3. Projektionen av kroppen på xy-planet ges av $x^2+y^2 \le 1$.

$$M(\Omega) = \iiint_{\Omega} z\,dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left[\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z\,dz\right]dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left[\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)\right]dxdy$$

Nu används polära koorsdinater

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)\right]dxdy = \left[\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, dxdy = rdrd\theta\right] = \int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-r^2\right)drd\theta = 2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\left(1-r^2\right)dr = \frac{2\pi}{3}$$

---

4. Vektorfält $\mathbf{F} = (x^3 - x^2y, xy^2)$ är kontinuerligt deriverbar i hela $\mathbb{R}^2$.
Då gäller Greens sats

$$\oint_{x^2+y^2=4} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \iint_{x^2+y^2\le 4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 - x^2y\right)\right]dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 4}\left[y^2 + x^2\right]dxdy =$$

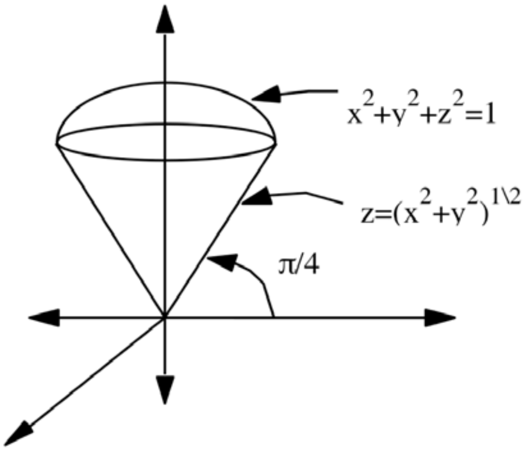
$$\begin{bmatrix} x = r\cos\theta\ ,\ r: 0 \to 2 \\ y = r\sin\theta\ ,\ \theta: 0 \to 2\pi \\ dxdy = rdrd\theta \end{bmatrix} = \left(\int_0^1 r^3 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 [\theta]_0^{2\pi} = 8\pi$$

Svar: $\underline{\oint_{x^2+y^2=4}\left(x^3 - x^2y\right)dx + xy^2dy = 8\pi}$

---

5. Inför sfäriska koordinater

Vi söker $\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\ \cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \\ 0 \le r \le 1 \end{cases} \quad [dxdydz = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr] =$$

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/4}\left[\int_0^{2\pi} rr^2 \sin\theta\, d\varphi\right] d\theta\right] dr = 2\pi[-\cos\theta]_0^{2\pi} \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

---

6. Funktionen f är kontinuerlig på det kompakta definitionsmängden $D(f)$. Dvs största värdet **M** och minsta värdet **m** finns. Mängden $D(f)$ är sammanhängande och satsen om mellanliggande värden implicerar att **m.** $\le V(f) \le$ **M.** Nu söks **M** och **m.**

(a) Inre av $D(f) = \{(x,y): y \ge x^2 \ , 2x+y \le 3\}$

$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \left(\frac{-x}{\sqrt{y-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{3-2x-y}}\ ,\ \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{3-2x-y}}\right) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (x,y) = (-1,3) \Rightarrow f(-1,3) = 2\sqrt{2}$$

(b) På randen

(1) på kurvan $y = x^2 \Rightarrow f(x,x^2) = h(x) = \sqrt{3-2x-x^2} \Rightarrow h'(x) = 0$

$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow h(-1) = \sqrt{3} \Rightarrow (x,y) = (-1,1)$

(2) på linjen $y = 3-2x \Rightarrow f(x,3-2x) = h(x) \Rightarrow h'(x) = 0$

$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow (x,y) = (-1,5).$

skärningspukter $(-3,9)\quad(-1,3)$

Svar : enligt ovan $f(-1,3) = 2\sqrt{2} \le V(f) \le 0 = f(1,1)$

---

7. Vi har $P = \dfrac{2y+4}{(y-x+4)^2}$, $Q = -\dfrac{2x-4}{(y-x+4)^2}$ och $P'_y = -\dfrac{2x+2y}{(y-x+4)^3} = Q'_x$. Detta innebär att integralen är oberoende av integrationsvägen i halvplanet $y-x+4 \ge 0$ och vi kan ersätta γ med vilken som helst kurva som ligger i halvplanet och som går från punkten (3,0) till punkten (0,–3). Vi väljer sträckan $\gamma_1: x-y=3,\ 0 \le x \le 3$.

$$\int_\gamma \frac{(2y+4)dx-(2x-4)dy}{(y-x+4)^2} = \int_{\gamma_1} \frac{(2y+4)dx-(2x-4)dy}{(y-x+4)^2} = =$$

= { γ_1 parametriseras: $x = t$, $y = t-3$, $dx = dt$, $dy = dt$, t från 3 till 0 } =

$$= \int_3^0 \frac{2(t-3)+4-(2t-4)}{(t-3-t+4)^2}dt = \int_3^0 2dt = -6$$

8. Låt x,y och z vara parallellepipedens kanter. Dess volym är xyz och dess diagonal är $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Sök maximum av xyz då $x^2+y^2+z^2=9$. $F = xyz + t(x^2+y^2+z^2-9)$.

$$\begin{cases} F'_x = yz + 2tx = 0 \\ F'_y = xz + 2ty = 0 \\ F'_z = xy + 2tz = 0 \\ F'_t = x^2+y^2+z^2-9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Ur $y \cdot F'_x - x \cdot F'_y = y^2z - x^2z = 0$ fås $x = y$ (x, y och z är positiva) och $z \cdot F'_y - y \cdot F'_z = xz^2 - xy^2 = 0$ ger $y = z$. $F'_t = 0$ ger då $x = y = z = \sqrt{3}$ och vi får att maximum av xyz är $= 3\sqrt{3} < 6$. **Svar:** Nej.