Institutionen för matematik, KTH
Lars Svensson

Lösningsförslag till

TENTAMENSSKRIVNING

5B1105 Differential- och integralkalkyl I, del 2
Torsdagen den 11 mars 2004, kl 14.00–19.00

DEL A

1. Tangentplanet till en nivåyta $F(x, y, z) = 0$ i en punkt $P : (a, b, c)$ ges av ekvationen $F'(a, b, c)[x - a, y - b, z - c]^\mathsf{T} = 0$. Här har vi

$$F'(x, y, z) = [e^y + ze^x, xe^y + e^z, ye^z + e^x] \;\Rightarrow\; F'(0, 0, 0) = [1, 1, 1],$$

och vi kontrollerar att $F(0, 0, 0) = 0$. Tangentplanets ekvation är alltså $x+y+z = 0$.

2. De partiella derivatorna till $z = y/(1 + x^2 - y)$ är

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = -\frac{2xy}{(1 + x^2 - y)^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = \frac{1}{1 + x^2 - y} + \frac{y}{(1 + x^2 - y)^2}.$$

Insättning visar att $(y/2x)z_x + yz_y = z$.

3. $f(x, y) = x + y + 4/xy^2$ har derivatan $f'(x, y) = [1 - 4/x^2y^2, 1 - 8/xy^3]$, som är noll i $(1, 2)$. Andraderivatan (Hesses matris) är

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/x^3y^2 & 8/x^2y^3 \\ 8/x^2y^3 & 24/xy^4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad f''(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Principalminorerna är $H_1 = 2$ och $H_2 = 2$. Eftersom bägge är strängt positiva, är det fråga om ett lokalt minimum och inte ett maximum. Svaret är alltså nej.

4. Beteckna med E projektionen av området D på planet $x = 0$. Olikheten $|y| + 2|z| \leq 2$ beskriver parallellogrammen med hörn i $(\pm 2, 0)$ och $(0, \pm 1)$. För fixt $(y, z) \in E$ varierar x från -1 till 1. Därmed fås

$$\iiint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_E \left(\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{2}{3} \iint_E \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Men arean av E är 4 enheter, varmed $\iint_D x^2 \mathrm{d}V = 8/3$.

5. Eftersom $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2$ på hela ytan $\mathcal{S}$, är integralen lika med $\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{S}}\mathrm{d}S$, d v s halva arean av $\mathcal{S}$. Arean av en yta uttryckt som $z=z(x,y)$ kan beräknas med formeln $\iint\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, och i vårt fall gäller

$$x^2+y^2+z^2=4 \;\Leftrightarrow\; z=\sqrt{4-x^2-y^2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} z_x=-x/\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z_y=-y/\sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases}$$

Därmed fås

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{S}}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{2}\mathrm{area}(\mathcal{S})=\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\
=\;&\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\overset{\star}{=}\int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{4-r^2}}=2\pi\int_0^1\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{4-r^2}}\overset{\star\star}{=}\\
\overset{\star\star}{=}\;&\pi\int_3^4 s^{-1/2}\mathrm{d}s=2\pi(2-\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Vid $\star$ införs planpolära koordinater enligt

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi, \quad \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$$

och vid $\star\star$ görs variabelsubstitutionen $s=4-r^2\Rightarrow \mathrm{d}s=-2r\mathrm{d}r,\ s:4\to 3$.

6. Vi skall beräkna $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$, där $P=x^2\arctan x$ och $Q=y\sin y$. Men då är $Q_x-P_y=0$. Eftersom P,Q,P_y och Q_x dessutom är kontinuerliga i hela $\mathbb{R}^2$, kan vi utan att förändra integralens värde välja en annan integrationsväg. Vi väljer det räta linjesegmentet mellan $(0,-1/2)$ och $(0,1/2)$, d v s $x=0,\ y:-1/2\to 1/2$, som ger

$$\begin{aligned}
&\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{-1/2}^{1/2}y\sin y\mathrm{d}y=2\int_0^{1/2}y\sin y\mathrm{d}y=\{\text{partialintegrera}\}=\\
=\;&[2y(-\cos y)]_0^{1/2}-\int_0^{1/2}2(-\cos y)\mathrm{d}y=2\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

7. Här är det lämpligt att använda Gauss' divergenssats. Vektorfältet $\mathbf{F}$ har konstant divergens, $\operatorname{div}\mathbf{F}=1-1+1=1$, varför

$$\iint_{\mathcal{S}=\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\mathrm{d}S=\iiint_D\operatorname{div}\mathbf{F}\mathrm{d}V=\iiint_D\mathrm{d}V=\mathrm{volym}(D),$$

där $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1, x^2+y^2\le z\le 1\}$. Planet $z=1$ utgör den övre begränsningsytan och områdets volym fås därför som

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\star}{=}\int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(1-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=2\pi\int_0^1(r-r^3)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

Symbolen $\star$ har samma innebörd här som i uppgift 5.

8. Vi vill minimera $f(x,y,z) = x+y+z$ då $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ och $h(x,y,z) = x-y-z-1 = 0$. För att underlätta beräkningarna börjar vi med att slå samman de båda bivillkoren till ett. Av $h(x,y,z) = 0$ följer $x = y+z+1$. Insättning i $g(x,y,z) = 0$ ger villkoret

$$y^2+z^2+1+2yz+2y+2z+y^2+z^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; G(y,z) = y^2+z^2+yz+y+z = 0.$$

Vi sätter in $x = y+z+1$ även i f och får

$$f(x,y,z) = f(y+z+1,y,z) = F(y,z) = 1+2y+2z.$$

Det ursprungliga optimeringsproblemet är alltså ekvivalent med att minimera $F(y,z) = 1+2y+2z$ under bivillkoret $G(y,z) = y^2+z^2+yz+y+z = 0$.

Vi vet att gradienterna

$$F'(y,z) = [2,2]^{\mathsf{T}} \quad \text{och} \quad G'(y,z) = [2y+2z+1, y+2z+1]^{\mathsf{T}}$$

måste vara parallella i ett optimum. Detta är detsamma som att $2y+z+1 = y+2z+1$ eller $y = z$. Men $G(y,z) = G(y,y) = 0$ ger då $y(2+3y) = 0$, med lösningar $y = 0$ eller $y = -2/3$. Detta motsvarar punkterna $(1,0,0)$ och $(-1/3,-2/3,-2/3)$, där $f(x,y,z)$ har värdet 1 respektive $-5/3$.

Det återstår att motivera att det funna värdet verkligen är det minsta möjliga, alltså att det existerar en lösning till minimeringsproblemet. Funktionen f är kontinuerlig och den mängd som definieras av de båda ursprungliga bivillkoren är sluten och begränsad. Enligt sats 13.2 i Adams antar f då både maximum och minimum. (Detta resonemang ingår inte i fordringarna för full poäng på uppgiften.)

En **alternativ lösningmetod** är att utgå från kravet att gradienterna

$$f'(x,y,z) = [1,1,1]^{\mathsf{T}}, \quad g'(x,y,z) = [2x,2y,2z]^{\mathsf{T}} \quad \text{och} \quad h(x,y,z) = [1,-1,-1]^{\mathsf{T}}$$

är linjärt beroende i ett optimum:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ x & y & z \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ x & y & z \end{bmatrix} = 2(-z+y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = z.$$

$g(x,y,y) = x^2+2y^2-1 = 0$ och $h(x,y,y) = x-2y-1 = 0$ ger nu $x = 2y+1$ och $g(2y+1,y,y) = 2y(3y+2) = 0$. Resten av lösningen är identisk med den första.

DEL B

9. Vi ser att $(x,y) \in D$ precis då $(u,v) \in E = \{(u,v) \mid 1 < u < 2, 1 < v < 2\}$. Jacobideterminanten fås som

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\det \begin{bmatrix} y & x \\ 4x & -2y \end{bmatrix}\right| = 4x^2+2y^2,$$

varmed $\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2(2x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Vid variabelsubstitutionen övergår integralen i

$$\iint_D \frac{xy(2x^2+y^2)}{2x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_E \frac{u}{v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 [\ln v]_1^2 = \frac{3}{4}\ln 2.$$

10. Om vi kallar $P(x,y) = (2+1/x^2)e^{y-x^2}$ och $Q(x,y) = -e^{y-x^2}/x$, ses att

$$P_y(x,y) - Q_x(x,y) = \left(2+\frac{1}{x^2}\right)e^{y-x^2} - \frac{1}{x^2}e^{y-x^2} + \frac{1}{x}(-2x)e^{y-x^2} = 0.$$

Eftersom P, Q, P_y och Q_x är kontinuerliga utom i origo, kan vi deformera integrationsvägen. Ett bekvämt val är kurvan $\mathcal{C} = \{(x,y) \mid y = x^2, x : 1 \to 2\}$, $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$:

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{C}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(2+\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}2x\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

11. Vi använder Gauss' divergenssats. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2x + 0 - 2z = 2(x-z)$, så att

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{S}=\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\mathrm{d}S = \iiint_D 2(x-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
= &\iint_{\substack{2x+y\le 1\\ x,y\ge 0}} \left[2xz - z^2\right]_{2x+y}^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1/2}\int_{y=0}^{1-2x} (-1+2x+2xy+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
= &\int_0^{1/2}\left(-\frac{2}{3} + 3x - 4x^2 + \frac{4}{3}x^3\right)\mathrm{d}x = -\frac{5}{48}.
\end{aligned}$$

12. Problemet är att finna största och minsta värdet av

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

under bivillkoren $2xy + 2xz + 2yz = 6$ och $x,y,z \ge 0$. Cauchy-Schwarz' olikhet, $|\langle u,v\rangle| \le ||u||\,||v||$, tillämpad på $u = (x,y,z)$ och $v = (y,z,x)$ ger

$$xy + xz + yz = 3 \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{y^2+z^2+x^2} = d(x,y,z)^2.$$

Således kan $d(x,y,z)$ bara anta värden som är $\ge \sqrt{3}$. Vi visar nu att alla sådana värden också antas. Välj $y = z \in (0,1]$ och sätt in i sambandet ovan:

$$y^2 + 2xy = 3 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3-y^2}{2y} \quad \text{och} \quad d(x,y,z)^2 = \frac{(3-y^2)^2}{4y^2} + 2y^2 = f(y).$$

Vi ser att $f(1) = 3$ och $f(y) \to \infty$ då $y \downarrow 0$. Eftersom f är en kontinuerlig funktion på $(0,1]$, antar den alla mellanliggande värden. Detta visar att $d(x,y,z)$ antar alla värden i intervallet $[\sqrt{3}, \infty)$.