Institutionen för matematik, KTH
Henrik Eriksson

5B1105, Differential- och integralkalkyl I, del 2.
LÖSNING TILL TENTAMEN, TISDAG 28 NOV 2006

DEL A

1. Funktionen är diskontinuerlig på cirklarna $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 3$ osv.

2. Uttrycket kan skrivas $y \ln(1 + x)$ och blandade andraderivatan blir då

$$\frac{1}{1+x}$$

3. Gradienten är

$$\mathbf{grad}\,\Phi = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

och i den riktningen växer signalstyrkan snabbast, nämligen med $|\mathbf{grad}\,\Phi| = 5$ enheter per meter. Man ska alltså gå två meter.

4. Projektionen i xy-planet blir en kvarts enhetscirkel.

$$\int\int (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \{\text{polära}\} = 2\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

5. Parametrisera linjen som

$$\left\{ \begin{array}{c} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{array} \right\} \; 0 \le t \le 1$$

Då blir integralen av temperaturen över sträckan

$$\int_0^1 8t^4\, dt = \frac{8}{5}$$

och eftersom sträckans längd är 3 blir medeltemperaturen 8/15.

6. Greens formel ger att kurvintegralens värde är lika med

$$\int\int (2x + 2y)\, dx\, dy = 2$$

7.

$$\Phi(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x - 3e$$

8. Integreras $\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\mathbf{F} = 6x + 2$ över kuben blir svaret 5.

DEL B

9. Med Lagranges multiplikator blir uttrycket som ska maximeras

$$xy + \lambda(4x^2 + 9y^2 - 100)$$

Om derivatorna sätts till noll får man $x = \sqrt{50}/2$ och $y = \sqrt{50}/3$ och alltså blir maxhastigheten $25/3$ som är drygt åtta meter per sekund. Bra kutat, G!

10. Båglängdsintegralen blir

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 36t^2 + (18t^2)^2}\,dt = \int_0^1 (1 + 18t^2)\,dt = 1 + 6 = 7$$

11. Den plana bottnen finns på höjden $z = e^{-1}$ och volymen blir

$$\int\int (e^{-x^2-y^2} - \frac{1}{e})\,dx\,dy = \{\text{polära}\} = \pi(1 - \frac{2}{e})$$

12. Eftersom $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 0$ är flödet ut genom den buktiga svampytan lika med flödet in genom den plana bottnen på höjden $z = 1/e$, och då är bara fältets z-komponent intressant. Flödet blir

$$\int\int (e^{-x^2-y^2} + \frac{1}{e})\,dx\,dy = \pi$$