Institutionen för matematik, KTH
A. Falkne, G. Hulth, T. Ivanov, B. Leander, R. Skjelnes

Tentamensskrivning, 2002-04-10, kl 08.00–13.00.
5B1105, Differential- och Integralkalkyl I, del 2.

För godkänt krävs minst 32 poäng. Betygsgränserna för 4 och 5 är preliminärt 48 resp. 62 poäng. Varje bonuspoäng ger 2 poäng på tentamen. Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning. Inga hjälpmedel är tillåtna.

---

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $F(x,y,z) = x+y+z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}-4=0$ i punkten $P=(2,3,6)$. (4 p)

2. En kurva har parameterframställningen $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$. Beräkna båglängden av den del av kurvan vars ändpunkter är $(1,0,1)$ och $(-e^{\pi}, 0, e^{\pi})$. (4 p)

3. Bestäm det största och det minsta värde som antas av $f(x,y) = x+4y$ på ellipsen $x^2+2y^2=9$. (4 p)

4. Antag att $f(x,y)$ är differentierbar och $z(u,v) = f\big(\frac{u}{v}, \frac{u-v}{u}\big)$, $uv \neq 0$. Visa att $u\dfrac{\partial z}{\partial u} + v\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$. (4 p)

5. Beräkna linjeintegralen $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = \big(-y \arctan \frac{y}{x}, \, x\arctan\frac{y}{x}\big)$ och Γ är randen till området $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1, \ 0 \le y \le x\}$ genomlöpt ett varv i positiv riktning. (6 p)

6. Beräkna den itererade integralen $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_{2y}^{2} e^{x^2}\,dx\Big)\,dy$. (6 p)

7. Låt $f(x,y,z) = x^2y - x\sin z - e^y$ och $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, x)$. Ange vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem: $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\operatorname{div}\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\operatorname{div}\operatorname{grad}\operatorname{grad} f$. (6 p)

8. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xy\,,\,0\,,\,z^2)$ *ut* genom den *slutna* begränsningsytan till det område som begränsas av ytorna $z = x^2+y^2$ och $z=1$. (6 p)

9. Beräkna volymen V av den kropp som begränsas av paraboloiden $x^2+y^2=2z$ och planet $x+y+z=1$. (6 p)

10. Låt $F(x,y,z) = x+y+z-\sin(xyz)$.

    a) Visa att ekvationen $F(x,y,z)=0$ lokalt definierar z som en funktion $z=f(x,y)$ i någon omgivning av origo så att $f(0,0)=0$. Beräkna de partiella derivatorna $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ i punkten $(x,y)=(0,0)$. (4 p)

    b) Ange en ekvation för den räta linje som skär ytan $z=f(x,y)$ under rät vinkel i punkten $(x,y,z)=(0,0,0)$. (2 p)

    c) Bestäm det största värde riktningsderivatan $D_{\mathbf{v}}f$ kan anta i punkten $(x,y)=(0,0)$. (2 p)

11. För vilka värden på konstanten a har funktionen $f(x,y) = (4x^2+axy+y^2)(x+a)$ ett lokalt extremvärde i origo? Ange också extrempunktens karaktär. (8 p)

12. Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+(x^2+y^3)^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    a) Visa att $f(x,y) \to 0$ längs varje rät linje in mot origo. (2 p)

    b) Avgör om f är kontinuerlig i origo. (4 p)

    c) Existerar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ i origo? (2 p)