Matematik KTH
Tentamensskrivning Flervariabelanalys 5B4048
Datum: 080117
Skrivtid: 5 timmar.
Inga hjälpmedel tillåtna.
Varje uppgift ger 3 poäng. Gräns för godkänt: 15 poäng.
Examinator: Mattias Dahl

1. Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna det i så fall:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$$

2. Bestäm tangentplanet till den tvåmantlade hyperboloiden $x^2+y^2-z^2=-1$ i punkten $(1,1,\sqrt{3})$.

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = xy\cdot\sin x$ i punkten $(\pi/2, 1)$.
a) I vilken riktning växer f snabbast och hur stor är tillväxten i denna riktning?
b) Beräkna riktningsderivatan av f i riktningen $(-3,4)$.

4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y)=\frac{4x-3}{1+x^2+y^2}$ då $x^2+y^2\le 1$.

5. Låt $D=\{(x,y): x^2+y^2-2x\le 0\}$ och beräkna $\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$.

6. Beräkna $\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}dS$ där A är den del av konen $z=\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ där $z\le 1$ och dS är areaelementet (ytelementet).

7. Avgör om kraftfältet $F=(y+2x,x)$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$, och om så är fallet, bestäm en potentialfunktion $\phi(x,y)$ till F. Beräkna vidare $\int_\gamma F\cdot dr$ där γ är övre halvan av den moturs orienterade cirkeln med radie 1 och centrum i $(2,1)$.

8. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (x^3-x^2y)dx+(xy^2)dy$ där γ är cirkeln $x^2+y^2=4$ genomlöpt en gång moturs.

9. Beräkna flödet av fältet

$$F=\frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$$

ut ur området $K: 2\le x^2+y^2+z^2\le 3$.

10. Sätt $\overline{v}=(1,0,0)$, $\overline{r}=(x,y,z)$ och $r=|\overline{r}|$. Visa att

$$grad\left(\frac{\overline{v}\cdot\overline{r}}{r^3}\right) = -\nabla\times\left(\frac{\overline{v}\times\overline{r}}{r^3}\right)$$

för $r\neq 0$.

Lycka till!

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMENSSKRIVNING I FLERVARIABELANALYS, KTH 5B4048

(1) Vi närmar oss $(0,0)$ dels längs linjen $y=x$ och dels längs linjen $y=0$:

$$f(x,x)=\frac{x^2+x^2}{x^2+x^2+x^2}=\frac{2x^2}{3x^2}=2/3 \text{ då } x\to 0$$

$$f(x,0)=\frac{x^2}{x^2}=1 \text{ då } x\to 0.$$ Således existerar inte detta gränsvärde. □

(2) Tangentplanet i punkten (a,b) ges av

$$z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

Här är $a=b=1$ och $z^2=x^2+y^2+1 \Rightarrow z=\sqrt{x^2+y^2+1}$ (ty $z=\sqrt{3}>0$)

Så $f(x,y)=z=\sqrt{x^2+y^2+1} \Rightarrow f(1,1)=\sqrt{3}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)^{-1/2}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ och}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)^{-1/2}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$ tangentplanet i $(1,1,\sqrt{3})$ ges av

$$z=f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+\frac{1}{\sqrt{3}}(y-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{x+y-3\sqrt{z}+1=0}.$$ □

SB4048

(3) a) Grad $f(a)$ pekar i den riktning i vilken f växer snabbast i punkten a, och den maximala tillväxthastigheten är $|\text{grad} f(a)|$.

$$\text{Grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y \cdot \sin x + xy\cos x, x\sin x)$$

$$\Rightarrow \text{grad} f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \left(1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) = (1, \pi/2)$$

så f växer snabbast i riktningen $\underline{(1, \pi/2)}$, och tillväxten är $|\text{grad} f(\frac{\pi}{2}, 1)| = \sqrt{1^2 + \frac{\pi^2}{2^2}} = \underline{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}}$.

b) $v = (-3, 4)$. Normerat: $v = \frac{1}{5}(-3, 4)$ (så $|v| = 1$)

$$\Rightarrow f_v'\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \text{grad} f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \cdot \frac{1}{5}(-3, 4) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{5}(-3, 4) = \underline{\underline{\frac{-3 + 2\pi}{5}}}$$

□

(4) $$f_x' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4y^2 - 4x^2 + 6x + 4}{(1 + x^2 + y^2)^2} \quad \& \quad f_y' = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y(4x-3)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Kritiska punkter: $f_y' = 0 \Rightarrow y = 0$ el. $x = 3/4$. Om $y = 0$ ger $f_x' = 0$ att $x = 2$ el. $x = -1/2$. Men $(2, 0)$ ligger ej i området $x^2 + y^2 \leq 1$. Vi har $f(-\frac{1}{2}, 0) = \frac{4(-\frac{1}{2}) - 3}{1 + (-\frac{1}{2})^2} = \boxed{-4}$. Om $x = 3/4$ får vi $\underline{f \equiv 0}$.

Parametrisera randen:

$$(x, y) = (\cos t, \sin t) \Rightarrow f(\cos t, \sin t) = \frac{4 \cdot \cos t - 3}{1 + \cos^2 t + \sin^2 t} = \frac{4\cos t - 3}{2}$$

och $\frac{d}{dt}\left(\frac{4\cos t - 3}{2}\right) = -4\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ el $t = \pi$ $\Rightarrow$

$\frac{4\cos t - 3}{2}$ har maximum $\boxed{1/2}$ då $t = 0$, och minimum $\boxed{-7/2}$ då $t = \pi$.

Således är funktionens minsta värde $\underline{\underline{-4}}$ och dess största värde $\underline{\underline{1/2}}$. □

5B4048

(5) Kvadratkomplettering ger

$$x^2+y^2-2x \le 0 \iff (x-1)^2+y^2 \le 1,$$

och vi går över till polära koordinater (utgående från (1,0)): $\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ där $0 \le r \le 1$ och $0 \le \theta \le 2\pi$.

Då får vi funktionaldeterminanten $\dfrac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$

$$\Rightarrow \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_E \left((1+r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\right) r\,dr\,d\theta =$$

$$= \iint_E (1+2r\cos\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\, r\,dr\,d\theta =$$

$$= \iint_E (1+r^2+2r\cos\theta)\, r\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = [\sin\theta]_0^{2\pi} = 0$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1+r^2+2r\cos\theta)\, r\,d\theta \right) dr = \int_0^1 \left[\theta r + \theta r^3 + 2r^2\sin\theta \right]_0^{2\pi} dr.$$

$$= \int_0^1 (2\pi r + 2\pi r^3)\,dr = 2\pi \int_0^1 (r+r^3)\,dr =$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \boxed{\frac{3\pi}{2}}.$$

□

SB4048

(6) Med $f(x,y)=\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}} \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}} \quad \text{för } x^2+y^2\neq 0.$$

Vi får därför $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{2(x^2+y^2)}+\frac{y^2}{2(x^2+y^2)}}\,dxdy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dS=\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{2(x^2+y^2)}}\,dxdy=$$

$$=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\,dxdy \quad \text{där } D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 2\} \text{ ty } z\leq 1.$$

Övergång till polära koordinater

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow dxdy=rdrd\theta\,;\ 0\leq\theta\leq 2\pi \text{ och}$$
$$r^2=x^2+y^2\leq 2 \Rightarrow 0\leq r\leq\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dS=\sqrt{\frac{3}{2}}\iint_{x^2+y^2\leq 2}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\cdot r\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,drd\theta=2\pi\sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\cdot\sqrt{2}^4=\boxed{\frac{4\pi}{\sqrt{3}}}.$$

D

SB4048

(7) En eventuell potentialfunktion ϕ måste satisfiera
$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = y + 2x & (1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x & (2) \end{cases}$$

Integration av (2) m. avs. på y ger $\phi(x,y) = xy + \varphi(x)$. Deriverar vi detta med avs på x och jämför med (1) får vi

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y + \varphi'(x) = y + 2x \Rightarrow \varphi'(x) = 2x \Rightarrow \varphi(x) = \underline{x^2 + C_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x,y) = xy + x^2 + C_1}$$ så $\mathbb{F}$ är konservativt.

$\Rightarrow \int_\gamma \mathbb{F} \cdot dr$ är oberoende av integrationsvägen

$\Rightarrow \int_\gamma \mathbb{F} \cdot dr = \phi(b) - \phi(a)$ där a & b är γ:s ändpunkter.

Cirkelstycket ges av $r(t) = (2 + \cos t, 1 + \sin t)$ där $\underline{0 \leq t \leq \pi}$ $\Rightarrow r(\pi) = (1,1) = b$ och $r(0) = (3,1) = a$

$$\Rightarrow \int_\gamma \mathbb{F} \cdot dr = \phi(1,1) - \phi(3,1) = 1 \cdot 1 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3^2 = 2 - 12 = \boxed{-10}$$

5B4048

(8) $P(x,y)=x^3-x^2y$ & $Q(x,y)=xy^2$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2+x^2$. Med Greens formel

får vi $\int_\gamma P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=$

$=\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cdot r\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^2 r^3\,dr=$

$=2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2=2\pi\cdot 4=\boxed{8\pi}$. □

(9) K är ett ihåligt klot med yttre begränsningsyta då $R=\sqrt{3}$ och inre då $R=\sqrt{2}$.
Den utåtriktade enhetsnormalen på den yttre ytan är $N=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ flödet ut ur den yttre ytan till K blir

$\iint F\cdot N\,dS=\iint\frac{(x,y,z)}{R^2}\cdot\frac{(x,y,z)}{\sqrt{3}}\,dS=\iint\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,dS=$

$=\iint\frac{R^2}{R^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 4\pi(\sqrt{3})^2=\underline{4\pi\sqrt{3}}$.

P.s.s. blir flödet ut genom den inre begränsningsytan (dess utåtriktade enhetsnormal är $N=-\frac{(x,y,z)}{\sqrt{2}}$)

$\iint F\cdot N\,dS=\iint\frac{-(x,y,z)}{R^2}\cdot\frac{(x,y,z)}{\sqrt{2}}\,dS=-\iint\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2\cdot\sqrt{2}}\,dS=$

$=-\iint\frac{R^2}{R^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dS=-\frac{1}{\sqrt{2}}\iint dS=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 4\pi(\sqrt{2})^2=\underline{-4\pi\sqrt{2}}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Totala flödet ut ur ytan blir $4\pi\sqrt{3}-4\pi\sqrt{2}=\underline{\underline{4\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}$ □

5B4048

(10) $\frac{\bar{v}\cdot\bar{r}}{r^3} = \frac{(1,0,0)\cdot(x,y,z)}{r^3} = \frac{x}{r^3} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{grad}\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{r}}{r^3}\right) = \operatorname{grad}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) =$

$= \left(\frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}(-2x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \frac{-3xy(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \frac{-3xz(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right)$

Och $\nabla\times\left(\frac{\bar{v}\times\bar{r}}{r^3}\right)$:

$\bar{v}\times\bar{r} = (1,0,0)\times(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = yk - zj = \underline{(0,-z,y)}$

$\Rightarrow \frac{\bar{v}\times\bar{r}}{r^3} = \frac{(0,-z,y)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow \nabla\times\left(\frac{\bar{v}\times\bar{r}}{r^3}\right) = \nabla\times\left(\frac{(0,-z,y)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) =$

$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix} =$

$\left(\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2} + (x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3},\right.$

$\left. \frac{+3xy(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \frac{+3xz(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right) =$

$= \left(\frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}(2x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \frac{3xy(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \frac{3xz(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right) =$

$= -\operatorname{grad}\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{r}}{r^3}\right)$. $\square$