

Matematik KTH

Tentamensskrivning Flervariabelanalys 5B4048

Datum: 2007-09-01

Skrivtid: 5 timmar.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Varje uppgift ger 3 poäng. Gräns för godkänt: 15 poäng.

Examinator: Mattias Dahl

1. Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna det i så fall:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - 1}{x - 1}$$

2. Finn ekvationen till tangentplanet till ytan $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$ i punkten $(1, 1, 3)$. Bestäm även f 's Taylorpolynom av grad ett i punkten $(1, 1, 3)$.

3. Beräkna riktningsderivatan i riktningen $(-4, 2, -4)$ av funktionen

$$f(x, y, z) = \frac{xy^2z^3}{2 + x}$$

i punkten $(2, 2, 1)$.

4. Beräkna det största och minsta värdet som funktionen $f(x, y) = (x - y)/(x^2 + y^2 + 1)$ antar i halvcirkeln $x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0$.

5. Beräkna dubbelintegralen $\int \int_D (x + 2y) \cos(2x + y) dx dy$ där $D = \{(x, y) : 0 \leq x + 2y \leq 1, -1 \leq 2x + y \leq 1\}$.

6. Låt Y vara ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 1/2$. Skissera ytan och beräkna arean av Y !

7. Avgör om kraftfältet $F = (2xy, x^2 - y^2)$ är konservativt i \mathbb{R}^2 , och om så är fallet, bestäm en potentialfunktion $\phi(x, y)$ till F . Beräkna vidare $\int_\gamma F \cdot dr$ där γ är den moturs orienterade kvarts-cirkeln i andra kvadranten med radie 1 och centrum i $(-3, 2)$.

8. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (2xy - x^2 + y^2 \sin(xy^2)) dx + (x + y^2 + 2xy \sin(xy^2)) dy$ där γ är den moturs orienterade randen till området $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

9. Beräkna flödet av fältet $F = (4xy, -2y^2, z^3)$ ut genom enhetssfären!

10. Låt F vara vektorfältet $F = (x - 3y + z^2, 2x - y^2 + z, x^2 + y^2 - 2z^2)$. Beräkna

$$a) \nabla \cdot F \quad b) \nabla \times F \quad c) \nabla(\nabla \cdot F)$$

Lycka till!