Institutionen för matematik, KTH
Henrik Eriksson

5B1105, Differential- och integralkalkyl I, del 2.
Tentamen, tisdag 28 nov 2006 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta. För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 14 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Här motsvarar skrivning 1–7 uppgift 1–7.

DEL A

(3p) **1.** I vilka punkter är funktionen $f(x, y, z) = [x^2 + y^2 + z^2]$ diskontinuerlig? (Med $[u]$ menas heltalsdelen, till exempel är $[\pi] = 3$.)

(3p) **2.** Beräkna blandade andraderivatan till uttrycket $\ln{(1 + x)^y}$.

(3p) **3.** Trådlösa internet har svag signal i Hs kontorsrum, bara 90. När H flyttar sej norrut (y-riktningen) växer signalstyrkan med 3 för varje meter och när han flyttar sej österut (x-riktningen) avtar den med 4 för varje meter. I vilken riktning växer den fortast och ungefär hur långt i den riktningen måste man gå för att signalstyrkan ska ha gått upp till 100?

(3p) **4.** Beräkna volymen av den del av kuben $0 \le x, y, z \le 1$ som ligger inuti paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

(3p) **5.** Temperaturen i punkten (x, y, z) är

$$T = xyz^2$$

Beräkna medeltemperaturen på den räta linjen mellan origo och $(1, 2, 2)$!

(3p) **6.** Beräkna kurvintegralen

$$\oint (\sin x - y^2)\,dx + (x^2 + \cos y)\,dy$$

ett varv i positiv led runt enhetskvadraten med ett hörn i origo och det diagonalt motsatta hörnet i (1,1).

(3p) **7.** Har följande vektorfält en potential? Bestäm i så fall en sådan potential $\Phi(x, y, z)$ som dessutom har $\Phi(1, 1, 1) = 0$.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} e^y + ze^x \\ e^z + xe^y \\ e^x + ye^z \end{pmatrix}$$

(3p) **8.** Ett vektorfält definieras av $\mathbf{F}$=$\mathbf{grad}(x^3 + y^2 + z)$. Bestäm dess totalflöde ut ur en kub med sidan 1, som har ett hörn i origo och ett annat i (1,1,1).

DEL B

(5p) **9.** G joggar i Lilljansskogen med steglängden x m/steg och stegfrekvensen y steg/s. Hennes hastighet är alltså xy m/s och den vill hon maximera. Men naturen sätter gränser för x och y, nämligen villkoret

$$4x^2 + 9y^2 \leq 100$$

Vad blir maxhastigheten? (Som jämförelse springer världseliten 10 m/s.)

(5p) **10.** En pilfink som ligger och trycker i origo skräms upp av den flåsande joggaren och flyger upp till grenen i punkten (1,3,6) längs parameterkurvan

$$x = t,\ y = 3t^2,\ z = 6t^3$$

Vacker väg, tänker G uppskattande, och bara obetydligt längre än raka vägen! Hur mycket längre?

11. I gläntan bakom vägochvatten svävar en bit över marken ett ufo! Det är cirkulärt
(5p) som ett tefat med en meters radie och dess övre välvda stålgråa yta beskrivs av ekvationen

$$z = e^{-x^2-y^2}$$

medan undersidan är plan. G stirrar vantroget medan hon i huvudet beräknar ufots volym till 0.83013795400795 m^3 (med sexton siffrors noggrannhet).

Med π och e kan man ange volymen exakt. Gör det!

(5p) **12.** Av den karakteristiska doften sluter sej G till att ufot är en ovanligt stolt fjällskivling. Hon drar sej till minnes att doftfältet brukar vara

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} e^{-y^2} - x \\ e^{-z^2} \\ e^{-x^2-y^2} + z \end{pmatrix}$$

och undrar hur stort doftflödet är ut ur svampens buktiga yta. Om hon gör antagandet att undersidan är horisontell och plan och faktiskt svävar ett stycke över marken (alltså bortser från den smala fot som finns), vad blir doftflödet?