LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMENS-SKRIVNING I FLERVARIABELANALYS, 5B4048, 2007-09-01

(1) Vi närmar oss $(1,1)$ dels längs linjen $y=x$ dels längs linjen $y=1$:

$$f(x,x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=x+1\to \underline{\underline{2}} \text{ då } x\to 1$$

$$f(x,1)=\frac{x-1}{x-1}=\underline{1} \text{ då } x\to 1.$$ Gränsvärdet existerar ej!

(2) De partiella derivatorna blir

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=4y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=4$$

$\Rightarrow$ tangentplanet i den givna punkten blir

$$z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)=$$

$$=f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)=$$

$$=3+2(x-1)+4(y-1)=2x+4y-3,$$ så ekvationen är $\underline{z=2x+4y-3}$ och Taylorpolynomet till f av grad 1 i punkten $(1,1,3)$ blir $\underline{2x+4y-3}$.

(3) Normering av $(-4,2,-4)$ ger $v=\frac{1}{6}(-4,2,-4)\Rightarrow$

$$\Rightarrow f_v'=\operatorname{grad} f\cdot v=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot v=$$

$$=\left(\frac{y^2z^3}{(2+x)}-\frac{xy^2z^3}{(2+x)^2},\ \frac{2xyz^3}{2+x},\ \frac{3xy^2z^2}{2+x}\right)\cdot v,$$ och i $(2,2,1)$ får vi

$$f_v'(2,2,1)=\left(\tfrac{1}{2},2,6\right)\cdot\tfrac{1}{6}(-4,2,-4)=\underline{\underline{-11/3}}.\quad \square$$

(4) $f_x'(x,y) = \dfrac{y^2-x^2+1+2xy}{(x^2+y^2+1)^2}$ och

5B4048,
1/9-07

$f_y'(x,y) = \dfrac{y^2-x^2-1-2xy}{(x^2+y^2+1)^2}$ ⇒ stationära punkter:

$\begin{cases} y^2-x^2 = -1-2xy \\ y^2-x^2 = 1+2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = -1 \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. På y-axeln har vi $f(0,y) = \dfrac{-y}{1+y^2}$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{-y}{1+y^2}\right) = \dfrac{y^2-1}{(1+y^2)^2}$ med nollställen $y = \pm 1$ och motsv.

funktionsvärden är $f(0,1) = -1/2$ & $f(0,-1) = +1/2$.

I halvcirkelbågens ändpunkter får vi $f(0,2) = -2/5$ &

$f(0,-2) = 2/5$.

Cirkelbågen kan parametriseras med

$(x,y) = (2\cos t, 2\sin t) \Rightarrow f(2\cos t, 2\sin t) = \dfrac{2\cos t - 2\sin t}{4+1} =$

$= \frac{2}{5}(\cos t - \sin t)$.

I det givna intervallet $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ har vi lokalt

min där $t = 3\pi/4$ och $f\left(2\cos\frac{3\pi}{4}, 2\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

(ty $\frac{d}{dt}\frac{2}{5}\cdot(\cos t - \sin t) = -\frac{2}{5}\sin t - \frac{2}{5}\cos t = 0 \Leftrightarrow -\sin t = \cos t \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4}$)

Således är funktionens minsta värde $= -\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ och

dess största värde är $1/2$. ∎

5B4048
1/9-07

(5) Variabelbytet $\begin{cases} u = x+2y \\ v = 2x+y \end{cases}$ ger

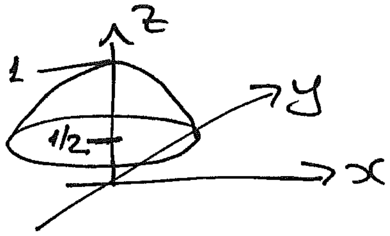
$0 \le u \le 1$ & $-1 \le v \le 1$ och $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$\Rightarrow \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$I = \iint_D (x+2y)\cos(2x+y)\,dx\,dy = \iint_E u \cdot \cos v \cdot \frac{1}{3}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 u\,du \int_{-1}^{1} \cos v\,dv = \frac{1}{3}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\sin v\right]_{-1}^{1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sin 1}}$$

(6) Y är en sfärisk kalott:



Arean av Y ges av $A = \iint_Y dS$ där areaelementet

$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$ där $f(x,y) = z = \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \iint_Y dS = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$= \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ där $D = \{(x,y): 0 \le x^2+y^2 \le 3/4\}$ ty

$1/2 \le z \le 1 \Rightarrow 1/4 \le z^2 \le 1$ & $z^2 = 1-x^2-y^2$.

Övergång till polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ger

$$A = \iint_{0 \le x^2+y^2 \le 3/4} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} =$$

$$= 2\pi\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{\sqrt{3}/2} = 2\pi\left(1-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\pi}} \ \square$$

7) Om vi lyckas finna en potentialfunktion ϕ har vi visat att kraftfältet är konservativt. Vi söker ϕ;

5B4048
1/9-07

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \quad (1) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 - y^2 \quad (2) \end{cases}$$

Integrerar vi (1) m.avs. på x får vi

$\Phi(x,y) = x^2 y + \varphi(y)$, och om vi deriverar detta m.avs. på y och jämför med (2) ovan får vi

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \varphi'(y) = -y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + C_1$$

$\Rightarrow \quad \Phi(x,y) = x^2 \cdot y - \dfrac{y^3}{3} + C_1$ är potentialfunktion

För varje kurva γ gäller då $\int_\gamma F \cdot dr = \phi(b) - \phi(a)$

där a & b är γ:s begynnelse- resp. slutpunkt.

$\gamma: r(t) = (-3 + \cos t, 2 + \sin t), \ \pi/2 \le t \le \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow r(\pi) = (-3 + \cos\pi, 2 + \sin\pi) = \underline{(-4,2) = b}$ och

$r(\pi/2) = (-3 + \cos\frac{\pi}{2}, 2 + \sin\frac{\pi}{2}) = \underline{(-3,3) = a}$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dr = \phi(-4,2) - \phi(-3,3) = 16 \cdot 2 - \frac{8}{3} - 9 \cdot 3 + \frac{27}{3} = \underline{\underline{34/3}} \quad \square$$

5B4048
1/9-07

(8) $P(x,y) = 2xy - x^2 + y^2 \cdot \sin(xy^2)$
$Q(x,y) = x + y^2 + 2xy \cdot \sin(xy^2)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2x$. Med Greens formel får vi

nu $\displaystyle\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$

$$= \iint_D (1-2x)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \Big[(1-2x)\cdot y\Big]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (1-2x)(\sqrt{x} - x^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \underline{\underline{1/30}}. \quad \square$$

(9) Med divergenssatsen får vi $\displaystyle\iint_Y F \cdot dS = \iiint_K \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz$

där Y är enhetssfären och K klotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_Y F \cdot dS = \iiint_K \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz = \iiint_K 3z^2\,dx\,dy\,dz =$$

$$= 2 \cdot \iint_{0 \le x^2+y^2 \le 1} \Big[z^3\Big]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\,dy = \iint_{0 \le x^2+y^2 \le 1} 2(1-x^2-y^2)^{3/2}\,dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ dx\,dy = r\,dr\,d\theta \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2(1-r^2)^{3/2}\,r\,dr\,d\theta = 4\pi \int_0^1 (1-r^2)^{3/2}\,r\,dr = 4\pi \left[-\frac{(1-r^2)^{5/2}}{5/2} \cdot \frac{1}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \underline{\underline{4\pi/5}} \quad \square$$

5B4048

1/9-07

(10) a) $\nabla \cdot F = \operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \underline{1-2y-4z}.$

b) $$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)j +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k = (2y-1)i + (2z-2x)j + (2+3)k =$$

$$= \underline{\underline{(2y-1, 2z-2x, 5)}}.$$

c) $\nabla(\nabla \cdot F) = \nabla(1-2y-4z) = \underline{(0,-2,-4)}.$