

## TENTAMENSSKRIVNING

5B1105 DIFFERENTIAL- OCH INTEGRALKALKYL I, DEL 2

TORSDAGEN DEN 11 MARS 2004, KL 14.00–19.00

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Råde och Westergren: *BETA, Mathematics Handbook*. För betyg tre krävs minst 15 poäng på del A. För betyg fyra eller fem krävs dessutom minst 9 respektive minst 15 poäng på del B. Under kursens gång har fyra lappskrivningar (LS) och tre hemskrivningar (HS) givits. Godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i del A, såsom anges nedan.

### DEL A

1. Bestäm tangentplanet genom  $(0, 0, 0)$  till ytan  $xe^y + ye^z + ze^x = 0$ . (3 p, LS 1)

2. Låt (3 p, HS 1)

$$z = \frac{y}{1 + x^2 - y}.$$

Verifiera att

$$\frac{y}{2x} \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

3. Är  $(1, 2)$  ett lokalt maximum till (3 p, LS 2)

$$f(x, y) = x + y + \frac{4}{xy^2} \quad ?$$

4. Beräkna (3 p, HS 2)

$$\iiint_D x^2 dx dy dz,$$

där  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| + 2|z| \leq 2\}$ .

5. Beräkna ytintegralen (3 p, LS 3)

$$\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

där  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}$ .

6. Beräkna linjeintegralen (3 p, HS 3)

$$\int_L x^2 \arctan x dx + y \sin y dy,$$

där kurvan  $L$  går från  $(0, -1/2)$  till  $(0, 1/2)$  längs den högra halvan av ellipsen  $x^2 + 4y^2 = 1$ .

7. Beräkna flödet av vektorfältet

(3 p, LS 4)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix}$$

ut ur det område som begränsas av paraboloiden  $z = x^2 + y^2$  och planet  $z = 1$ .

8. Bestäm det minsta värde som  $x + y + z$  kan anta om  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  och  $x - y - z = 1$ . (3 p, —)

### DEL B

9. Beräkna

(5 p)

$$\iint_D \frac{xy(2x^2 + y^2)}{2x^2 - y^2} dx dy,$$

där  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < xy < 2, 1 < 2x^2 - y^2 < 2, x > 0, y > 0\}$ , genom variabelsubstitutionen

$$\begin{cases} u = xy \\ v = 2x^2 - y^2 \end{cases}.$$

10. Beräkna linjeintegralen

(5 p)

$$\int_L \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) e^{y-x^2} dx - \frac{1}{x} e^{y-x^2} dy,$$

där  $L$  är linjesegmentet från  $(1, 1)$  till  $(2, 4)$ .

*Ledning:*  $y = x^2$  i  $L$ 's ändpunkter.

11. Beräkna  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ , dvs flödesintegralen av vektorfältet  $\mathbf{F}$ , givet av

(5 p)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ xz \\ y^2 - z^2 \end{bmatrix},$$

ut ur ytan  $\mathcal{S}$ , som begränsar den kropp som definieras av olikheterna  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $z \leq 1$  och  $2x + y \leq z$ .

12. Vilka värden kan längden av diagonalen i ett rätblock med arean 6 anta?

(5 p)