

Bråk och bråkräkning

Om du tycker att du behärskar bråkräkning så behöver du inte läsa det här och om du upptäcker efterhand att du behöver repetera, så kan du alltid gå tillbaka och göra det. Observera att det är meningen att du skall räkna för hand. Du får gärna använda räknare för att kontrollera och jämföra, men du skall i första hand arbeta med papper och penna; det är ju bråkräkning och inte knapptryckning du skall träna.

Ett rationellt tal är ett vanligt bråk, dvs ett tal av formen a/b där a och b är heltal¹ (självkänt måste $b \neq 0$ eftersom man inte kan dividera med 0). Exempel är $1/2$, $2/3$, $-5/4$, $101/64$ och 7 . Observera särskilt att alla heltal är rationella tal - man kan ju skriva $7 = 7/1$, om man vill. I talet a/b kallas a *täljare* och b *nämnare*.² Ordet "täljare" kommer av ett gammalt ord för räkna, "tälja", och "nämnare" kommer av "att nämna" (något vid namn). Det är precis så man skall tänka på ett bråk, säg $2/7$: Täljaren 2 räknar hur många man har och nämnaren 7 berättar vad det är man har, i det här fallet sjundedelar. $2/7$ betyder alltså två stycken sjundedelar, två sjundedelar. Man kan säga att "sjundedel" är enheten och tvåan i täljaren säger hur många enheter man har. Den här lilla språkliga utvecklingen kanske verkar tramsig, men den är faktiskt ganska bra att ha i bakhuvudet när man vill förstå vad bråk är och hur man räknar med dem. När man tänker på talet $2/7$ som två stycken sjundedelar, så inser man omedelbart att

$$\frac{2}{7} = 2 \cdot \frac{1}{7} \quad \text{och allmänt att} \quad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Detta ger också

$$\frac{4}{7} = 4 \cdot \frac{1}{7} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{7} = 2 \cdot \frac{2}{7}, \quad \text{dvs allmänt} \quad \frac{ac}{b} = a \cdot \frac{c}{b}.$$

Två viktiga "operationer" på bråk är *förlängning* och *förkortning*. Att förlänga ett bråk betyder att multiplicera täljare och nämnare med samma tal och det viktiga i sammanhanget är att detta *inte ändrar talets värde*. I en formel skrivs det här

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}. \tag{1}$$

Här har vi förlängt bråket a/b med c . Om man läser likheten från höger till vänster istället så har vi å andra sidan ett exempel på en förkortning av ett

¹Heltalen är $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Talen $0, 1, 2, 3, \dots$ kallas naturliga tal.

²Minnesregel: täljaren i toppen och nämnaren där nere.

bråk. Här är ett par exempel:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}, \quad \frac{6}{13} = \frac{6 \cdot 7}{13 \cdot 7} = \frac{42}{91}.$$

Ett särskilt viktigt exempel är

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots$$

Hur kan man förstå och motivera att bråken a/b och ac/bc betyder samma tal? Jo, tänk t ex på talet $1/7$ och tänk närmare bestämt på det som en sjundedels tårta. Det går förstås sju sådana bitar på en tårta. Om vi delar varje sjundedel på mitten så får vi 14 stycken fjortondels tårtbitar och varje sjundedel består av två stycken fjortondelar. Alltså måste

$$\frac{1}{7} = 2 \cdot \frac{1}{14} = \frac{2}{14}.$$

Eftersom hälften av en sjundedel är en fjortondel, så har vi även

$$\frac{1}{7} / 2 = \frac{1}{14} = \frac{1}{7 \cdot 2}; \quad \text{allmänt} \quad \frac{a}{b} / c = \frac{a}{b \cdot c}.$$

När man i praktiken arbetar med rationella tal så strävar man ofta efter att ha dem på en form där man inte kan förkorta längre. Exempelvis föredrar man formen

$$\frac{2}{3} \quad \text{framför} \quad \frac{14}{21}.$$

Det finns situationer i vilka man har behov av att förlänga, men ofta strävar man som sagt mot den här *fullständigt förkortade formen*. Det finns metoder för att avgöra huruvida ett bråk är fullständigt förkortat (som man till och med kan arbeta med utan dator eller räknare; de var kända redan under antiken!), men de är inte intressanta för vårt vidkommande.

Vi är nu nästan redo att *multiplitera bråk*. Hur skall man uppfatta exempelvis

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}?$$

Låt oss ett ögonblick ersätta $3/5$ med ett godtyckligt tal x och fundera över vad $\frac{1}{2} \cdot x$ kan vara. Om vi multiplicerar det här talet med 2 så får vi

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x = \frac{2 \cdot 1}{2} \cdot x = \frac{2}{2} \cdot x = 1 \cdot x = x$$

och härav drar vi slutsatsen att $\frac{1}{2} \cdot x$ måste vara hälften av x , dvs

$$\frac{1}{2} \cdot x = x/2.$$

Om $x = 3/5$ så betyder detta

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} / 2 = \frac{3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}.$$

Den allmänna formeln för bråkmultiplikation blir

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \frac{c}{d} / b = a \cdot \frac{c}{db} = \frac{ac}{db} = \frac{ac}{bd}.$$

Notera att den här formeln så att säga innehåller formeln för förlängning:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc}.$$

Division av ett bråk med ett annat är inte heller någon konst: Talet

$$y = \frac{a}{b} \bigg/ \frac{c}{d}$$

bör ju ha egenskapen att om vi multiplicerar det med c/d , så får vi a/b ,

$$y \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Men enligt formeln för multiplikation gäller

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd}$$

och förkortar vi i högerledet med cd så får vi

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Alltså måste

$$y = \frac{a}{b} \bigg/ \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Det återstår att reda ut hur man adderar rationella tal. Om nämnarna är lika så är det enkelt:

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{2+5}{9} = \frac{7}{9}.$$

I ord kan man uttrycka detta: om man har två enheter av något (t ex äpplen eller niondelar) och lägger till ytterligare fem enheter, så har man sammanlagt $2 + 5 = 7$ enheter (äpplen eller niondelar). Men vad blir exempelvis

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{22}?$$

Om vi fortsätter att tala i termer av ”enheter” som ovan, så måste vi här ersätta enheterna tolfedelar respektive tjugoadradelar med en gemensam enhet, eller med andra ord *uttrycka dem i en gemensam enhet*. Hur hittar vi en sådan? Jo, genom att förlänga de båda bråken. Förläng $5/12$ med 22 och $7/22$ med 12:

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{22} = \frac{5 \cdot 22}{12 \cdot 22} + \frac{7 \cdot 12}{22 \cdot 12}$$

Nu har vi samma nämnare, nämligen $12 \cdot 22 = 264$, och vi kan addera:

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{22} = \frac{5 \cdot 22 + 7 \cdot 12}{12 \cdot 22} = \frac{194}{264}.$$

Den allmänna formeln för bråkaddition blir på samma sätt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Här krävs ett par kommentarer. För det första är slutresultatet $194/264$ inte fullständigt förkortat eftersom både täljare och nämnare är delbara med 2:

$$\frac{194}{264} = \frac{194/2}{264/2} = \frac{97}{132}$$

vilket råkar vara fullständigt förkortat. För det andra är $12 \cdot 22$ inte den minsta möjliga nämnaren. En mindre är 132, vilket man ser genom räkningen

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{22} = \frac{5 \cdot 11}{12 \cdot 11} + \frac{7 \cdot 6}{22 \cdot 6} = \frac{55}{132} + \frac{42}{132} = \frac{97}{132}.$$

I vårt arbete i den här kursen finns det dock ingen anledning att ständigt sträva efter den här "minsta gemensamma nämnaren". Till sist skall vi ge ett par exempel och varna för några fallgropar.

Exempel:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{15} = \frac{15}{2 \cdot 15} - \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 15} = \frac{15 - 4}{30} = \frac{11}{30}$$

Lägg märke till i vilken ordning räkneoperationerna skall utföras: först multiplikationen $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$ och därefter subtraktionen. Skilj alltså noga mellan

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \quad \text{och} \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{5}.$$

Vad blir förresten det senare bråket?

Exempel: I ett uttryck som

$$a \cdot \frac{b+c}{d}$$

fungerar bråkstrecket som en parentes. Uttrycket är med andra ord lika med

$$\frac{a(b+c)}{d} = \frac{ab+ac}{d}.$$

Ibland ser man tyvärr den felaktiga uträkningen

$$a \cdot \frac{b+c}{d} = \frac{ab+c}{d},$$

men den ger egendomligheter som t ex

$$2 \cdot \frac{3}{5} = 2 \cdot \frac{0+3}{5} = \frac{2 \cdot 0 + 3}{5} = \frac{3}{5}.$$

Exempel: Ett annat fel som man ser då och då är en vansinnig form av bråk-addition, nämligen

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{5+7} = \frac{5}{12},$$

alltså addition av täljarna respektive nämnarna för sig. Använder vi den här ”metoden” på summan $1/2 + 1/2$ så får vi

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

vilket ju faktiskt är ren galenskap!

När man har lärt sig räkna med rationella tal så är steget till att arbeta med uttryck som

$$\frac{a+bc}{d+e^2}$$

inte alls långt och i själva verket har vi ju redan gjort det ovan, fast då låtsats att bokstäverna står för olika heltal. Men det är förstås inget som hindrar att de står för andra typer av tal eller är variabler:

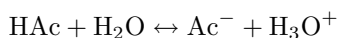
$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{a}{ax} - \frac{x}{ax}}{x-a} = \frac{(a-x)/ax}{x-a} = \frac{a-x}{ax(x-a)} = -\frac{1}{ax}.$$

(Just den här lilla räkningen har man glädje av när man skall derivera funktionen $1/x$.)

Men varför i hela världen måste man hålla på att lära sig att räkna med bråk? Kan man inte överlåta detta trista arbete till en räknare eller i svåra fall en dator? Svaret är både ”jovisst, låt en maskin göra jobbet” och ”nej, man måste kunna göra det själv för hand”. Det finns absolut ingen anledning att utföra beräkningar som

$$\left(\frac{3}{65537}\right)^5 - \frac{4711}{666}$$

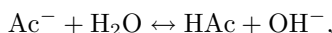
med penna och papper; det gör en maskin både snabbare och säkrare. Vore det bara i sådana uträkningar och uttryck man stötte på bråk, så skulle man utan problem kunna strunta i att lära sig att räkna med dem. Men nu är det faktiskt så att bråk av olika typer (rationella tal eller uttryck med variabler) dyker upp på alla möjliga ställen i både matematiken och i tillämpningarna och då gäller det att veta hur man skall hantera dem. Här är ett enkelt exempel från kemien: Låt oss skriva reaktionen mellan ättiksyra HAc och vatten som



(Ac är alltså en förkortning för gruppen CH_3COO). Om vattnets koncentration kan betraktas som konstant (dvs koncentrationen av ättiksyra inte är för stor) så är

$$K_a(\text{HAc}) = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{Ac}^-]}{[\text{HAc}]}$$

en konstant, den s k syrakonstanten för HAc. (Hakparenteserna betyder koncentrationer.) Redan här har vi alltså ett kemiskt exempel på ett bråk! Om vi till ättiksyran sätter t ex natriumacetat NaAc, så kommer det att lösa sig och acetatjonerna Ac^- att reagera enligt



dvs de reagerar som baser. Baskonstanten för acetatjonen är

$$K_b(\text{Ac}^-) = \frac{[\text{HAc}][\text{OH}^-]}{[\text{Ac}^-]}.$$

Om vi använder reglerna för bråkmultiplikation och förkortning så får vi

$$\begin{aligned} K_a(\text{HAc})K_b(\text{Ac}^-) &= \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{Ac}^-]}{[\text{HAc}]} \cdot \frac{[\text{HAc}][\text{OH}^-]}{[\text{Ac}^-]} \\ &= \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{Ac}^-][\text{HAc}][\text{OH}^-]}{[\text{HAc}][\text{Ac}^-]} \\ &= [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-], \end{aligned}$$

vilket brukar kallas vattnets jonprodukt och betecknas K_w . Vi har således bevisat att

$$K_a(\text{HAc})K_b(\text{Ac}^-) = K_w.$$

Lägg märke till att vi faktiskt använde bråkräkning på ett väsentligt sätt i härledningen! Vi kommer att se massor av exempel på hur bråkräkning dyker upp vare sig man vill det eller ej i matematikkursen. *För att man skall hänga med i alla sådana räkningar räcker det inte att man vet hur man räknar ut t ex $1/2 + 1/3$ med hjälp av sin räknare.* Bråkräkningens mysterier måste helt enkelt sitta i ryggmärken och det enda sättet att fästa dem där är att räkna övningar och lösa problem, hur trist, tråkigt och motbjudande det än kan verka.

En fråga som tål att diskuteras är om det räcker att memorera själva formlerna för addition, multiplikation osv av bråk eller om man skall sträva efter att förstå dem i en djupare mening (och kunna härleda dem själv). Visserligen är "förståelse" ett notoriskt komplicerat begrepp, men jag vill nog hävda att det är det senare man skall sträva efter. Om man bara memorerar formlerna så är det mycket lätt hänt att man gör fel (minnet är ju hos de flesta av oss behäftat med en hel del skavanker!), medan man om man har förstått varför formlerna ser ut som de gör lätt kan rekonstruera dem om man skulle råka glömma dem. Den här anmärkningen gäller naturligtvis mycken annan matematik än just bråkräkning (inte bara matematik, förresten).

Till sist vill jag ge ytterligare några språkliga kommentarer och den första gäller ordet *bråk*. Jag nämnde i början varifrån orden täljare och nämnare kommer och det kan kanske vara av ett visst intresse att veta vad rationella tal har med bråk att göra. Ordet "bråk" har med "bryta" att göra. Att *bråka lin* betyder att man bryter (eller krossar) fibrerna i linet och förr i tiden fanns det en ohygglig avrättningsmetod som kallades *rådbråkning* och som innebar att man krossade benen i kroppen på den dömda. Nuförtiden nöjer vi oss med att rådbråka hjärnan när vi exempelvis räknar med bråk. Anledningen till att uttryck som $2/3$ kallas bråk är att man uppfattade dem som att täljaren (2) har brutits sönder i tre delar. Det förekommer i gammal litteratur att bråk även kallas brutna tal och på tyska säger man ibland *gebrochene Zahlen*. Att bråken även kallas rationella tal har inte direkt att göra med att de skulle vara speciellt förnuftiga, utan det latinska ordet *ratio* betyder helt enkelt förhållande (ordet finns ju f ö på engelska också).