

Andragradspolynom och kvadratkomplettering

Kvadratkomplettering är ett sätt att studera *andragradspolynom*, dvs funktioner av formen $f(x) = ax^2 + bx + c$. Man kan exempelvis vara intresserad av huruvida funktionen har något största eller minsta värde, för vilka värden på x som $f(x)$ är 0 osv. Att bestämma nollställena till f är förstås detsamma som att lösa andragradsekvationen $ax^2 + bx + c = 0$. Ofta löser man en sådan ekvation genom att sätta in i den s.k. ” p, q -formeln”, och sambandet mellan de här två metoderna är att formeln härleds och bevisas med hjälp av kvadratkomplettering. Det är med andra ord kvadratkomplettering som är fundamental och den ger dessutom mer information än p, q -formeln.

Vi låter $f(x) = ax^2 + bx + c$ och antar att $a \neq 0$, eftersom f inte är något andragradspolynom då $a = 0$. Vad kvadratkomplettering går ut på är att skriva f på formen $f(x) = \alpha(x + \beta)^2 + \gamma$, där α , β och γ är några tal som beror på f :s koefficienter a , b och c . Om man utvecklar med kvadreringsregeln så får man att

$$\alpha(x + \beta)^2 + \gamma = \alpha(x^2 + 2\beta x + \beta^2) + \gamma = \alpha x^2 + 2\alpha\beta x + \alpha\beta^2 + \gamma.$$

Vi vill nu att det här skall vara lika med $ax^2 + bx + c$ och jämför vi koefficienterna för de olika potenserna av x så får vi de tre sambanden

$$\alpha = a, \quad 2\alpha\beta = b, \quad \alpha\beta^2 + \gamma = c.$$

Talet α är tydligen bestämt redan här och det andra sambandet ger $\beta = b/2\alpha = b/2a$. Det tredje ger slutligen

$$\gamma = c - \alpha\beta^2 = c - a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Insättning ger

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Man skall inte försöka lära sig de här formlerna utantill, då blir det bara fel, utan det man skall koncentrera sig på är *metoden*.

Exempel: Om $f(x) = 2x^2 + x - 1$ så är $a = 2$, $b = 1$ och $c = -1$, så den kvadratkompletterade formen är

$$f(x) = 2 \left(x + \frac{1}{2 \cdot 2}\right)^2 + \frac{4 \cdot 2 \cdot (-1) - 1^2}{4 \cdot 2} = 2 \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}.$$

När man i praktiken kvadratkompletterar ett andragradspolynom så kan man gå tillväga som ovan, men ofta gör man i stället på följande sätt. Låt t ex $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Skriv först $f(x) = x^2 - 2 \cdot 3x + 8$ och lägg till och dra ifrån

kvadraten på halva koefficienten för x , dvs 3: $f(x) = x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2 + 8$. Nu är enligt kvadreringsregeln $x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 = (x-3)^2$, varför $f(x) = (x-3)^2 - 3^2 + 8 = (x-3)^2 - 1$. Om koefficienten för x^2 inte är 1, så börjar man (som ovan) med att bryta ut den. Exempelvis får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 2x - 3x^2 = (-3) \left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right) \\ &= (-3) \left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3} \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= (-3) \left(\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} \right) \\ &= \frac{4}{3} - 3 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Vad kan man nu använda kvadratkomplettering till? Låt oss återvända till exemplet $f(x) = 1 - 2x - 3x^2$. Av den kvadratkompletterade formen $f(x) = 4/3 - 3(x+1/3)^2$ ser vi omedelbart att $f(x) \leq 4/3$ för alla x eftersom $3(x+1/3)^2 \geq 0$ för alla x (kom ihåg att kvadraten på ett reellt tal alltid är ≥ 0 !). Värdet $4/3$ antas av f för $x = -1/3$ och för inga andra värden på x . Med andra ord är f :s största värde lika med $4/3$ och det antas bara för $x = -1/3$. Det är vidare lätt att bestämma f :s nollställan, vilket förstås är detsamma som att lösa ekvationen $f(x) = 1 - 2x - 3x^2 = 0$. För den här ekvationen betyder detsamma som

$$\frac{4}{3} - 3 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 = 0 \quad \text{eller} \quad \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Drar vi kvadratroten ur båda leden så får vi

$$x + \frac{1}{3} = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3} \quad \text{och alltså} \quad x = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}.$$

Nollställena till f (dvs lösningarna eller rötterna till ekvationen $f(x) = 0$) är således

$$x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1, \quad x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Om $f(x) = x^2 + px + q$ är ett allmänt andragradspolynom (i vilket x^2 har koefficient 1) får vi följande kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2} \right)^2 - \left(\frac{p}{2} \right)^2 + q \\ &= \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - \left(\frac{p}{2} \right)^2 + q. \end{aligned}$$

Ekvationen $f(x) = x^2 + px + q = 0$ betyder således detsamma som

$$\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q$$

och om högerledet $(p/2)^2 - q$ är ≥ 0 , så kan vi dra kvadratroten ur båda leden och får

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{eller} \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Det här är den bekanta " p, q -formeln" och man skall observera att kvadratkomplettering och p, q -formeln inte är två olika sätt att lösa andragradsekvationer, utan att *formeln i stället följer av kvadratkomplettering*. Kvadratkomplettering är med andra ord mer fundamental än p, q -formeln. Vi ser av härledningen att om storheten $(p/2)^2 - q < 0$ så har ekvationen $x^2 + px + q = 0$ inga reella rötter (i avsnittet om komplexa tal skall vi utvidga talsystemet så att ekvationen alltid har rötter). Om t ex $f(x) = x^2 + 4x + 8$ så är $(p/2)^2 - q = (4/2)^2 - 8 = 4 - 8 = -4 < 0$, varför $x^2 + 4x + 8 = 0$ saknar reella rötter.

För ett allmänt andragradspolynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ får vi med hjälp av ovanstående

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Med hjälp av kvadratkomplettering kan man som vi såg ovan bestämma det största och/eller minsta värdet av ett polynom f . Om koefficienten $a > 0$ så är $a(x + b/2a)^2 \geq 0$ för alla x , så att $f(x) \geq (4ac - b^2)/4a$ för alla x . För $x = -b/2a$ (men inte för några andra värden på x) blir det likhet, så detta är f :s minsta värde. Något *största värde* kan å andra sidan inte finnas eftersom $a(x + b/2a)^2$ kan bli hur stort som helst. Om $a < 0$ är $a(x + b/2a)^2 \leq 0$ och då har f i stället det största värdet $(4ac - b^2)/4a$, som antas för $x = -b/2a$. Något minsta värde finns inte.

Övningar

1. Kvadratkomplettera följande polynom, bestäm deras nollställen (om det finns några) samt största och/eller minsta värde.

- | | | |
|---------------------------|--------------------|--------------------|
| a. $x^2 + 4x + 3$ | b. $x^2 - 2x - 8$ | c. $20x^2 + x - 1$ |
| d. $3 + 8x - 3x^2$ | e. $4x^2 - 4x + 3$ | f. $x^2 - 2x - 2$ |
| g. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ | h. $1 - x - x^2$ | i. $x - 2x^2$ |

2. Bestäm det största och minsta värdet som $f(x) = 1 - x - x^2$ antar då $-2 \leq x \leq 3$.

3. Summan av två tal är 15 och deras produkt är -100 . Bestäm talen.

4. Vad är största möjliga arean av en rektangel som har omkretsen 10 m?

5. Beteckna nollställena till $f(x) = x^2 + px + q$ med x_1 och x_2 . Visa att $x_1 + x_2 = -p$ och att $x_1x_2 = q$. Visa dessutom att $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

6. Låt $f(x) = x^2 + px + q$ och visa att om $p^2 = 4q$, så har ekvationen $f(x) = 0$ bara en enda rot. Bestäm roten (uttryckt i p och q).

Svar och lösningar

1.

	Kvadratkompl. form	Nollställena	Största värde	Minsta värde
a.	$(x+2)^2 - 1$	$-1, 3$	saknas	-1
b.	$(x-1)^2 - 9$	$-2, 4$	saknas	-9
c.	$20(x+1/40)^2 - 81/80$	$-1/4, 1/5$	saknas	$-81/80$
d.	$25/3 - 3(x-4/3)^2$	$-1/3, 3$	$25/3$	saknas
e.	$4(x-1/2)^2 + 2$	saknas	saknas	2
f.	$(x-1)^2 - 3$	$1 \pm \sqrt{3}$	saknas	-3
g.	$(x-\sqrt{2})^2 - 1$	$\pm 1 + \sqrt{2}$	saknas	-1
h.	$5/4 - (x+1/2)^2$	$(-1 \pm \sqrt{5})/2$	$5/4$	saknas
i.	$1/8 - 2(x-1/4)^2$	$0, 1/2$	$1/8$	saknas

2. Det största värde som f antar överhuvudtaget är $5/4$ enligt 1 h. Värdet antas för $x = -1/2$, som ligger mellan -2 och 3 . Alltså är $5/4$ det största värde som $f(x)$ antar då $-2 \leq x \leq 3$. Den kvadratkompletterade formen $f(x) = 5/4 - (x+1/2)^2$ visar att f växer då $x < -1/2$ och avtar då $x > -1/2$. Alltså är det minsta värdet då $-2 \leq x \leq 3$ antingen $f(-2)$ eller $f(3)$. Men $f(-2) = -1$ och $f(3) = -11$, så svaret är -11 .

3. Låt talen vara a och b , så att $a + b = 15$, $ab = -100$. Vi får $b = 15 - a$ och insättning i den andra ekvationen ger $a(15 - a) = -100$ eller $a^2 - 15a - 100 = 0$. Kvadratkomplettering ger $(a - 15/2)^2 - (15/2)^2 - 100 = 0$ eller $(a - 15/2)^2 = 625/4$. Alltså är $a = 15/2 \pm 25/2$, dvs $a = -5$ eller $a = 20$. Insättning i $b = 15 - a$ ger $b = 20$ respektive $b = -5$.

4. Låt basen i rektangeln vara x m; då är höjden $5 - x$, så att arean är $A(x) = x(5 - x) = 5x - x^2 = -(x^2 - 5x) = -((x - 5/2)^2 - (5/2)^2) = 25/4 - (x - 5/2)^2$. Den största möjliga arean är således $25/4$ och den antas då $x = 5/2$, dvs då rektangeln är en kvadrat.

5. Formlerna $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$ följer omedelbart ur lösningsformeln $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$. Vi får nu

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + px + q = f(x).$$

6. Den kvadratkompletterade formen är $f(x) = (x + p/2)^2 + (4q - p^2)/4$. Om $p^2 = 4q$ så är $f(x) = (x + p/2)^2$, som har det enda nollstället $x_1 = -p/2$.