2. Linjärt beroende. Bas. Koordinater

I det här avsnittet kommer vi att definiera ett antal grundläggande begrepp som vi kommer att behöva i fortsättningen. Därför består avsnittet av ett antal definitioner följt av ett antal exempel på dessa.

2.1. Linjärkombination

Definition 2.1. Låt $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ vara vektorer i rummet. Ett uttryck av typen

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3,$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ kallas för en **linjärkombination** av vektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$.

Exempel 2.2. Låt $\underline{\boldsymbol{e}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ vara en ON-bas i planet. Vektorn

$$\boldsymbol{u} = 1024\boldsymbol{e}_1 + 512\boldsymbol{e}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1024 \\ 512 \end{pmatrix}$$

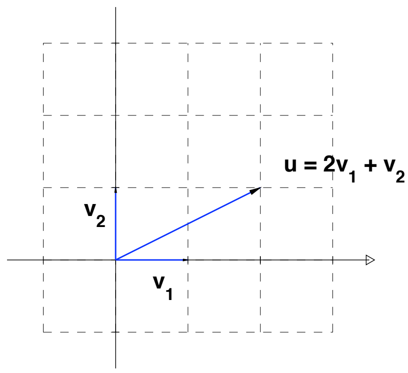
är en linjärkombination av vektorn $\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ty $\boldsymbol{u} = 512\boldsymbol{v}$. Geometriskt säger vi att $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är **parallella**. $\square$

Exempel 2.3. Vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en linjärkombination av vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ty det finns $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 1$, så att

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = 2\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}.$$

Eftersom vektorerna $\boldsymbol{e}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{e}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är vinkelräta och har längd 1 brukar dessa kallas för **standardbasen** för planet. $\square$

Figur 2.4.



Exempel 2.5. Vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är en linjärkombination av vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ty det finns $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = -2$, så att

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = 3\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u},$$

dvs $\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2$. Rita gärna en figur i ett koordinatsystem. □

Exempel 2.6. Vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ är ej en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, ty det finns <u>inga</u> λ_1 och λ_2, så att

$$\lambda_1\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}$$

har lösning. Vi har alltså att

$$\boldsymbol{u} \neq \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2$$

och därmed kan $\boldsymbol{u}$ inte nås med hjälp av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$. □

Exempel 2.7. Vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ är **parallella**, ty den ena är en linjärkombination av den andra; det finns $\lambda = 1/3$ så att

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_2.$$

Eller om man vill så finns $\lambda = 3$ så att $\boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{v}_1$. □

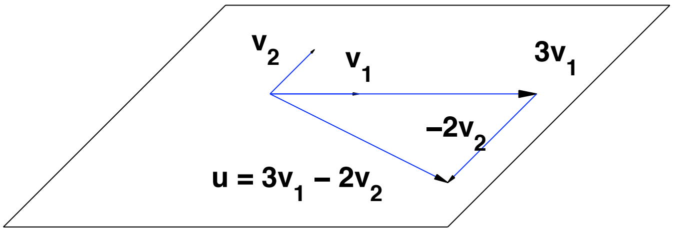
Exempel 2.8. Vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är **ej parallella**, ty den ena är inte en linjärkombination av den andra; det finns inget λ så att $\boldsymbol{v}_1 = \lambda\boldsymbol{v}_2$. □

Exempel 2.9. Vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ är en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, ty ekvationssystemet

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \lambda_1\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\\lambda_2\\\lambda_1\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

har lösningen $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = -2$. Vi tolkar kombinationen på följande sätt; för att nå $\boldsymbol{u}$ går vi 3 längdenheter i $\boldsymbol{v}_1$:s riktning samt 2 längdenheter i motsatt riktning för $\boldsymbol{v}_2$.

Figur 2.10.



□

Exempel 2.11. Vektorn $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ är ej en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, ty ekvationssystemet

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \lambda_1\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\\lambda_2\\\lambda_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

saknar lösning. Vi kan alltså inte nå $\boldsymbol{u}$ med hjälp av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$. □

I exemplen ovan behövde vi bara verifiera att en given vektor var en linjärkombination. I nästa exempel går vi igenom hur man undersöker i fall en vektor är en linjärkombination eller inte av en given mängd vektorer.

Exempel 2.12. Antag att $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Undersök om

$$\text{a) } \boldsymbol{v}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{b) } \boldsymbol{v}_4 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kan skrivas som en linjärkombination av mängden $\underline{\boldsymbol{v}} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$.

Lösning: a) Enligt Definition 2.1, så är $\boldsymbol{v}_3$ en linjärkombination av mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ om det finns reella tal λ_1 och λ_2, så att

$$\boldsymbol{v}_3 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi multiplicerar in λ_1 och λ_2 och skriver systemet på matrisform:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 & & & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Men detta system saknar lösning och därmed finns inga λ_1 och λ_2. Alltså är $\boldsymbol{v}_3$ inte en linjärkombination av $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$; $\boldsymbol{v}_3$ är utom räckhåll för $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$.
Geometriskt betyder detta att $\boldsymbol{v}_3$ inte ligger i det plan som spänns upp av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$.

b) Vi använder definitionen igen och får

$$\boldsymbol{v}_4 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi multiplicerar in λ_1 och λ_2 och skriver systemet på matrisform:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 3 \\ & & \lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1 & & & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 1 \\ \lambda_2 & = & 2 \end{array} \right.$$

dvs $\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$ är en linjärkombination; $\boldsymbol{v}_3$ är inom räckhåll för $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$.
Geometriskt betyder detta att $\boldsymbol{v}_4$ ligger i det plan som spänns upp av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$. $\square$

Exempel 2.13. Vi har i Exempel 2.12 sett att det finns vektorer som är linjärkombination respektive inte är en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Kan man bestämma alla linjärkombinationer av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$?

Lösning: Om $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ skall vara en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$, så krävs det att vi hittar λ_1 och λ_2 som löser systemet

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \lambda_1 \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Vi multiplicerar in λ_1 och λ_2 och skriver systemet på matrisform:

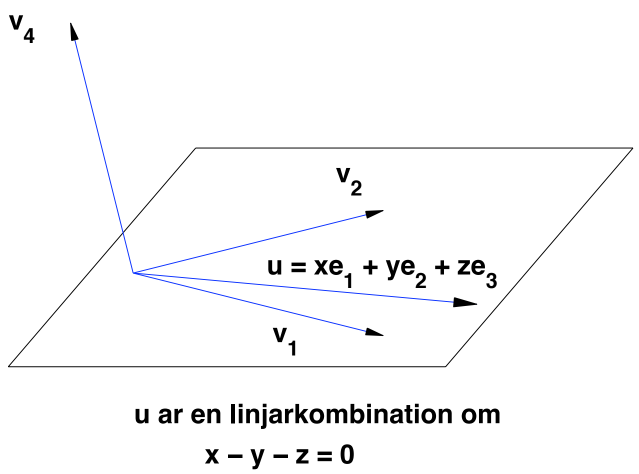
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & x \\ & & \lambda_2 & = & y \\ \lambda_1 & & & = & z \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x - y - z \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right).$$

Enligt första raden i sista matrisen ovan så måste gälla att

$$x - y - z = 0.$$

Detta är ekvationen för det plan som går igenom origo och är parallellt med $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$. Alltså, alla $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ som uppfyller ekvationen $x - y - z = 0$ är en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$; t.ex. vektorn $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ men inte $\boldsymbol{v}_4 = \underline{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Figur 2.14.



□