10.2. Underrum

Definition 10.12. En icke-tom delmängd U i ett linjärt rum V kallas ett **underrum** i V om för varje $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ och varje reellt tal λ gäller att

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$.
2. $\lambda \boldsymbol{u} \in U$.

Anmärkning 10.13. 1. Vi säger att U är ett underrum till V om U är självt ett linjärt rum som ligger i det större linjära rummet V.
2. Genom att välja $\lambda = 0$ visar definitionen ovan att nollelementet måste ligga i underrumet U, dvs $\mathbf{0} \in U$. Således är att $\mathbf{0} \notin U$ ett ganska enkelt sätt att visa att mängden U inte är ett underrum.

Exempel 10.14. I $\mathbf{R}^3$ är följande mängder underrum:

1. Origo, dvs, den mängd som består av elementet $\mathbf{0}$.
2. Räta linjer genom origo.
3. Plan genom origo.

Lösning: 1. Trivialt.

2a. Antag att L är en linje som går igenom origo O och har riktningsvektorn $\boldsymbol{v}$. Låt P_1 och P_2 vara två punkter på L med ortsvektorerna $\boldsymbol{u}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ resp. $\boldsymbol{u}_2 = \overrightarrow{OP_2}$. Då finns det reella tal t_1 och t_2, så att $\overrightarrow{OP_1} = t_1 \boldsymbol{v}$ och $\overrightarrow{OP_2} = t_2 \boldsymbol{v}$. Det följer att summan

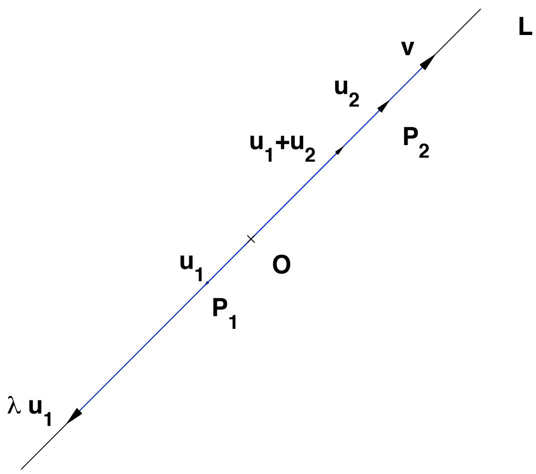
$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = t_1 \boldsymbol{v} + t_2 \boldsymbol{v} = (t_1 + t_2)\boldsymbol{v} = \{t = t_1 + t_2\} = t\boldsymbol{v} \in L,$$

är ortsvektorn för en punkt på L och

$$\lambda \boldsymbol{u}_1 = \lambda \overrightarrow{OP_1} = \lambda t_1 \boldsymbol{v} = \{t = \lambda t_1\} = t\boldsymbol{v} \in L,$$

är också en ortsvektor för en punkt på L. Alltså är L ett underrum i rummet.

Figur 10.15.

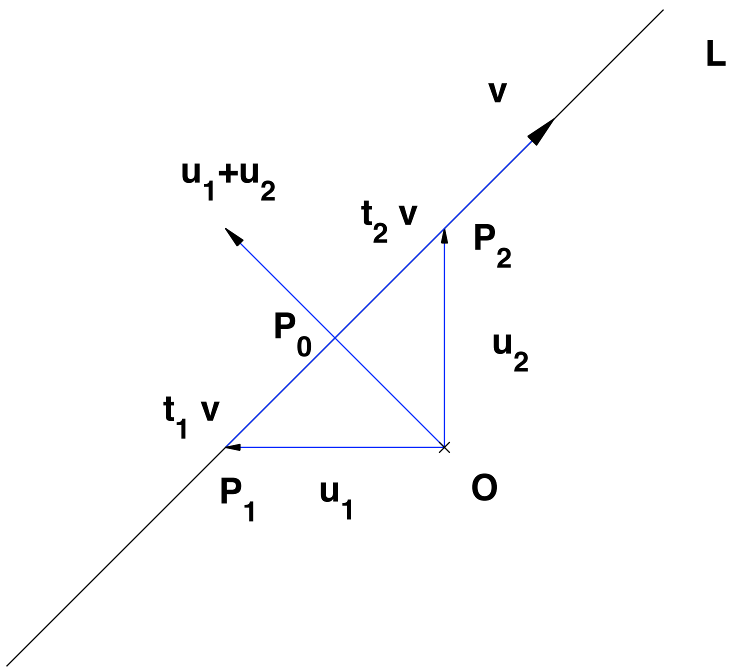


2b. Antag att L inte går igenom origo utan igenom punkten P_0. Två punkter P_1 och P_2 på L har ortvektorerna $\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_0}+t_1\boldsymbol{v}$ resp. $\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_0}+t_2\boldsymbol{v}$. Vi ser att summan

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_0}+t_1\boldsymbol{v}+\overrightarrow{OP_0}+t_2\boldsymbol{v}=2\,\overrightarrow{OP_0}+(t_1+t_2)\boldsymbol{v}=2\,\overrightarrow{OP_0}+t\boldsymbol{v}\notin L$$

inte är en ortvektor till en punkt på L och därmed är L inte ett underrum.

Figur 10.16.



3a. Antag att ett plan W går igenom origo O och har riktningsvektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$. Låt P_1 och P_2 vara två punkter i W med ortsvektorerna $\boldsymbol{u}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ resp. $\boldsymbol{u}_2 = \overrightarrow{OP_2}$. Då ligger vektorerna $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ i W och därmed är en linjärkombination av riktningsvektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$, dvs det finns reella tal s_1 och t_1, så att

$$\boldsymbol{u}_1 = s_1\boldsymbol{v}_1 + t_1\boldsymbol{v}_2.$$

och s_2 och t_2, så att

$$\boldsymbol{u}_2 = s_2\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2.$$

Då gäller att

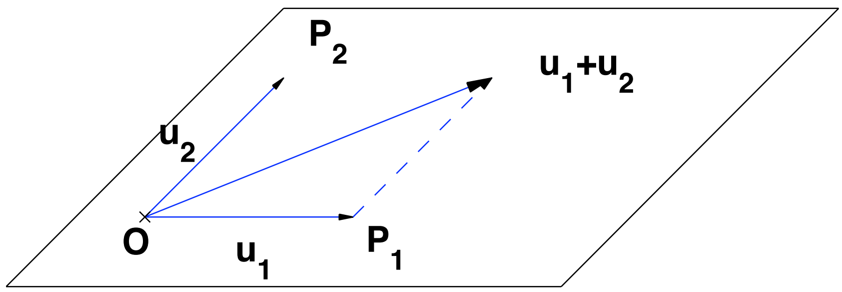
$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = (s_1\boldsymbol{v}_1 + t_1\boldsymbol{v}_2) + (s_2\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2) = (s_1 + s_2)\boldsymbol{v}_1 + (t_1 + t_2)\boldsymbol{v}_2 = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 \in W$$

dvs $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ är en ortsvektor för en punkt i planet. Vidare är

$$\lambda\boldsymbol{u}_1 = \lambda s_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda t_1\boldsymbol{v}_2 = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 \in W$$

också en ortsvektor till en punkt i planet. Alltså är planet W ett underrum i rummet.

Figur 10.17.



3b. Antag nu att planet W går igenom punkten P_0 istället för origo. Vi väljer två punkter P_1 och P_2 i planet W. Ortsvektorn till P_1 är $\overrightarrow{0P_1}=\overrightarrow{0P_0}+\overrightarrow{P_0P_1}$. Eftersom vektorn $\overrightarrow{P_0P_1}$ ligger i planet W är den en linjärkombination av riktningsvektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$, dvs det finns reella tal s_1 och t_1, så att

$$\overrightarrow{P_0P_1}= s_1\boldsymbol{v}_1 + t_1\boldsymbol{v}_2.$$

Ortsvektorn $\boldsymbol{u}_1 =\overrightarrow{0P_1}$ till P_1 ges därmed av

$$\boldsymbol{u}_1 =\overrightarrow{0P_0} + \overrightarrow{P_0P_1}=\overrightarrow{0P_0} +s_1\boldsymbol{v}_1 + t_1\boldsymbol{v}_2.$$

På samma sätt ges ortsvektorn $\boldsymbol{u}_2 =\overrightarrow{0P_2}$ till P_2 av

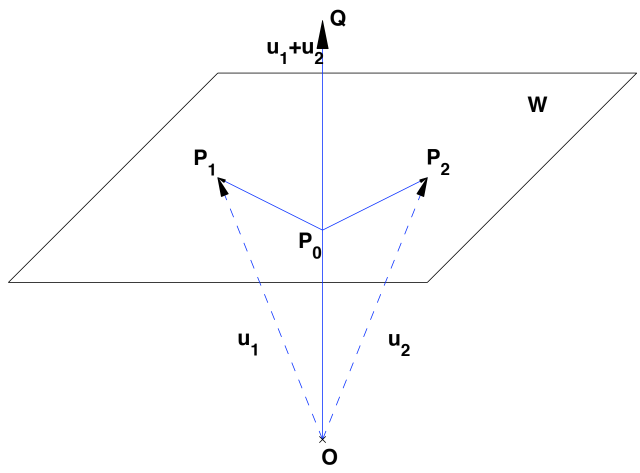
$$\boldsymbol{u}_2 =\overrightarrow{0P_2} + \overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{0P_0} +s_2\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2.$$

Dock är summan här inte återigen en ortvektor för en punkt Q i planet W, ty

$$\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2 = (\overrightarrow{0P_0} +s_1\boldsymbol{v}_1 + t_1\boldsymbol{v}_2) + (\overrightarrow{0P_0} +s_2\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2) = 2\,\overrightarrow{0P_0} +s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 \notin W.$$

Vi ser alltså att vi har lämnat planet W då punkten Q som har summan $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$ som ortvektor inte tillhör W.

Figur 10.18.



□

Exempel 10.19. Låt W_1 vara mängden av vektorer i rummet på planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, dvs $W_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Låt också $W_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.
Är W_1 och W_2 underrum i $\mathbf{R}^3$?

Lösning: a) Enligt Exempel 10.14, så är W_1 ett linjärt rum. Eftersom W_1 i sin tur ligger i det linjära rummet $\mathbf{R}^3$, så är W_1 ett underrum till $\mathbf{R}^3$.

b) Det följer igen av Exempel 10.14 att W_2 är inte ett linjärt rum och kan därför inte heller vara underrum till $\mathbf{R}^3$. □

Exempel 10.20. $\mathbf{C}$ = mängden av alla komplexa tal är ett linjärt rum, ty både summan och multiplikation med reella tal är återigen komplexa tal. Mängden av reella tal $\mathbf{R}$ är ett underrum till $\mathbf{C}$. Dock är mängden av rationella tal $\mathbf{Q}$ ej ett underrum till $\mathbf{R}$, ty multiplikation med reella tal är inte ett rationellt tal. □

Exempel 10.21. S_{nn} = mängden av $n \times n$ symmetriska matriser är ett underum i M_{nn}, ty både summan och multiplikatiom med reella tal är återigen en symmetrisk matris av samma typ n. T.ex., om $n = 2$, och $A, B \in S_{22}$, så är

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in S_{22}.$$

På samma sätt kan man visa att λA är en symmetrisk 2×2-matris. □

Exempel 10.22. T_{nn} = mängden av $n \times n$ ortogonala matriser är inte ett underum i M_{nn}, ty om $A \in T_{nn}$, så följer att

$$(\lambda A)(\lambda A)^t = \lambda^2 AA^t = \lambda^2 E \neq E.$$

Detta visar att λA inte är en ortogonal matris och tillhör därmed inte T_{nn}. □

Exempel 10.23. För varje heltal $k \geq 1$ är $C^k[a, b]$ = mängden av alla k gånger kontinuerligt deriverbara funktioner på intervallet $[a, b]$ ett underrum till $C[a, b]$. Enligt Exempel 10.7 så är både $C^k[a, b]$ och $C[a, b]$ linjära rum. Eftersom det finns kontinuerliga funktioner som inte är deriverbara så ligger rummet $C^k[a, b]$ i $C[a, b]$ och därmed är $C^k[a, b]$ ett underrum i $C[a, b]$. T.ex., så är funktionen $f(x) = |x|$ kontinuerling men inte deriverbar i $[-1, 1]$. □

Exempel 10.24. Enligt Exempel 10.7, så är $\mathcal{P}_n$ = mängden av alla polynom av grad $\leq n$, ett linjärt rum. Eftersom elementen i $\mathcal{P}_n$ är kontinuerliga, så är $\mathcal{P}_n$ ett underrum till det större linjära rummet $C[a, b]$. T.ex., så är trigonometriska, logaritm- och exponentialfunktionerna i $C[a, b]$. □

Exempel 10.25. Lösningsrummet till differentialekvationen

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \tag{10.4}$$

dvs

$$L_p = \{y \in C^2(\mathbf{R}) : \; y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)\}$$

är inte ett underrum i $C^2(\mathbf{R})$. För att inse detta låter vi $y_p \in L_p$. Vi får då att

$$(\lambda y_p)''(x) + a(\lambda y_p)'(x) + b(\lambda y_p)(x) = \lambda(y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x)) = \lambda f(x) \neq f(x).$$

Alltså $(\lambda y_p) \notin L_p$ och därmed är L_p inte ett underrum i $C^2(\mathbf{R})$.
Vi säger att ekvationen (10.4) är en linjär, **inhomogen** (ty $f(x) \neq 0$) differentialekvation av ordning 2. □

Exempel 10.26. Låt L_H vara mängden av lösningsvektorer i $\mathbf{R}^n$ till det linjära homogena ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, dvs

$$L_H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : \ A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

och låt L_p vara lösningsrummet till det inhomogena ekvationssystemet, dvs

$$L_P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n ; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}.$$

Är L_H respektive L_P underrum i $\mathbf{R}^n$? Se Sats 6.29

Lösning: a) Låt $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in L_H$. Då är $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$ två lösningar sådana att $A\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$ och $A\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$. För summan gäller att

$$A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$$

och

$$A(\lambda\boldsymbol{x}_1) = \lambda A\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}.$$

Alltså är L_H ett underrum i $\mathbf{R}^n$;.

b) Låt $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in L_P$. Då är $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$ två lösningar sådana att $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}$ och $A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}$. För summan gäller att

$$A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = 2\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}.$$

Alltså är L_p inte ett underrum i $\mathbf{R}^n$. □