10.6. Bas och koordinater

Definition 10.51. Vi säger att $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ är en bas för ett linjärt rum V om:

1. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ är linjärt oberoende
2. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ spänner upp V

Exempel 10.52. Mängden $M = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$, där

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^t, \qquad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^t, \qquad \dots \qquad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \dots, 1)^t$$

kallas **standardbasen** i $\mathbf{R}^n$, ty

1. M spänner upp $\mathbf{R}^n$, dvs $[M] = \mathbf{R}^n$. Om $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ så är

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^t = x_1(1, 0, \dots, 0)^t + x_2(0, 1, \dots, 0)^t + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1)^t \\ &= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

   en linjärkombination M.

2. M är linjärt oberoende:

$$\mathbf{0} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^t,$$

   dvs alla λ:na är 0.

□

Exempel 10.53. Mängden $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\} \subset \mathbf{R}^4$, där $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^t$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 1, -1)^t$, $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, -1, -1)^t$ och $\boldsymbol{v}_4 = (1, -1, -1, 1)^t$, är en bas i $\mathbf{R}^4$, ty vi har i Exempel 10.35 visat att M spänner upp $\mathbf{R}^4$ och i Exempel 10.47 att M är linjärt oberoende. □

Exempel 10.54. Låt $\mathcal{P}_n$ vara rummet av alla polynom av grad högst $\leq n$.
Mängden $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ kallas **standardbasen** för $\mathcal{P}_n$, ty

1. M spänner upp $\mathcal{P}_n$, dvs $\mathcal{P}_n = [1, x, x^2, \dots, x^n]$. Varje godtyckligt polynom

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots a_n \cdot x^n$$

   är en linjärkombination av M.

2. M är linjärt oberoende: Betrakta relationen

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x^2 + \dots + \lambda_n \cdot x^n = 0.$$

   Om $x = 0$, så får vi $\lambda_0 = 0$ och relationen är reducerad till

$$\lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x^2 + \dots + \lambda_n \cdot x^n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 + \dots + \lambda_n \cdot x^{n-1} = 0.$$

   Sätt in $x = 0$ på nytt och dra slutsatsen att $\lambda_1 = 0$. Upprepas detta förfarande får vi att alla λ:na är 0.

□

Följande resultat är en viktig egenskap hos en bas.

Sats 10.55. Mängden $M = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\} \subset V$ är en bas för V

$$\Leftrightarrow$$

alla $\boldsymbol{u}$ kan skrivas **entydigt** som linjärkombination av M.

Bevis: $\Rightarrow$: Antag att M är en bas för V. Då spänner M upp V och alla element $\boldsymbol{u}$ kan skrivas som linjärkombination av M på minst ett sätt. Antag att $\boldsymbol{u}$ kan skrivas på 2 sätt i basen M:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{u} &= \mu_1 \boldsymbol{e}_1 + \mu_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{e}_n. \end{aligned}$$

Vi subtraherar båda leden och får

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\boldsymbol{e}_n.$$

Men eftersom M är linjärt oberoende så följer att

$$\lambda_k - \mu_k = 0 \qquad \lambda_k = \mu_k, \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

vilket visar entydigheten.

$\Leftarrow$: Antag att alla $\boldsymbol{u}$ kan skrivas på exakt ett sätt som linjärkombination av M.
Då spänner M upp V. Återstår att visa att M är oberoende.
Eftersom $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ kan skrivas

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{e}_n.$$

och enligt antagandet är detta enda sättet som $\mathbf{0}$ kan skrivas på så har relationen

$$\mathbf{0} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n$$

endast den triviala lösningen $\lambda_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.
Mängden M är alltså oberoende och spänner upp V, dvs M är en bas för V. $\square$

Definition 10.56. Om $M = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ är en bas för V, och

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n$$

så kallas λ_j:na för $\boldsymbol{u}$:s **koordinater**.

Exempel 10.57. Enligt Exempel 10.53, så är mängden $\underline{\boldsymbol{v}} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\} \subset \mathbf{R}^4$, där $\boldsymbol{v}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}(1,1,1,1)^t$, $\boldsymbol{v}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}(1,-1,1,-1)^t$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,1,-1,-1)^t$ och $\boldsymbol{v}_4 = \underline{\boldsymbol{e}}(1,-1,-1,1)^t$, är en bas i $\mathbf{R}^4$. Bestäm koordinaterna för $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}(2,4,6,8)^t$ i basen $\underline{\boldsymbol{v}}$.

Lösning: Koordinater till vektorn $\boldsymbol{u}$ i basen $\underline{\boldsymbol{v}}$ är den entydiga lösningen den linjära kombinationen av vektorn $\boldsymbol{u}$ i basen $\underline{\boldsymbol{v}}$. Dessa fås genom att lösa systemet

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 + \lambda_4 \boldsymbol{v}_4.$$

Detta ger

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 5 \\ \lambda_2 & = & -1 \\ \lambda_3 & = & -2 \\ \lambda_4 & = & 0 \end{cases}$$

Vektorn $\boldsymbol{u}$ har alltså i basen $\underline{\boldsymbol{v}}$ koordinaterna $(5,-1,-2,0)^t$, dvs

$$\underline{\boldsymbol{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{v}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Exempel 10.58. Visa att

$$\underline{\boldsymbol{p}} = \{p_0(x) = 1,\ p_1(x) = 1 + x,\ p_2 = 1 + x + x^2\}$$

är en bas i $\mathcal{P}_2 = [1, x, x^2]$. Bestäm koordinaterna för $p(x) = 2x^2 + x + 4$ i basen $\underline{\boldsymbol{p}}$.

Lösning: Enligt Exempel 10.36 spänner $\underline{\boldsymbol{p}}$ rummet $\mathcal{P}_2$. Där visade vi att relationen

$$p(x) = \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x)$$

har entydig lösning för varje polynom $p \in \mathcal{P}_2$. Väljer vi speciellt nollpolynomet $p(x) \equiv 0$ får vi att systemet

$$\lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) = 0$$

har som entydig lösning den triviala lösningen $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Alltså är mängden linjärt oberoende. Vi har nu visat att $\underline{\boldsymbol{p}}$ är en bas i $\mathcal{P}_2$ och därmed kan varje polynom på ett etydigt sätt skrivas som en linjärkombination av denna bas. Talen λ_1, λ_2 och λ_3 i kombinationen

$$p(x) = \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x)$$

kallas för koordinater för polynomet $p(x)$ i basen $\underline{\boldsymbol{p}}$. Det följer alltså att

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1(1 + x) + \lambda_2(1 + x + x^2) = 2x^2 + x + 4$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \cdot 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x + \lambda_2 \cdot x^2 = 2x^2 + x + 4$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 4 \\ & & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ & & & & \lambda_2 & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccr} \lambda_1 & = & 3 \\ \lambda_2 & = & -1 \\ \lambda_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

Polynomet p har koordinaterna $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{\boldsymbol{p}}$, dvs

$$p(x) = 2x^2 + x + 4 = \underline{\boldsymbol{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

□

Vi visar en sats som kommer att ligga till grund till ett antal resultat framöver.

Sats 10.59. Antag att mängden $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ spänner upp V. Då är varje delmängd $N = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n, \ldots, \boldsymbol{w}_m\} \subset V$ med $m > n$ är linjärt beroende.

Bevis: Eftersom M spänner upp V, så är varje element $\boldsymbol{w}_k \in N$, $k = 1, 2, \ldots, m$, en linjärkombination av M:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{w}_1 & = & \alpha_{11}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{m1}\boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{w}_2 & = & \alpha_{12}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{m2}\boldsymbol{v}_n \\ \vdots & = & \vdots \\ \boldsymbol{w}_m & = & \alpha_{1n}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{2n}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{mn}\boldsymbol{v}_n. \end{array} \tag{10.7}$$

För att visa att N är linjärt beroende behöver vi visa att det finns tal λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, som inte alla är 0 så att

$$\lambda_1\boldsymbol{w}_1 + \lambda_2\boldsymbol{w}_2 + \ldots, +\lambda_m\boldsymbol{w}_m = \mathbf{0}. \tag{10.8}$$

Vi ser att vi skulle få uttrycket i (10.8) om vi multiplicerar vänstra leden i ekvationssystemet (10.7) med resp. λ_k och sen addera. Uttrycket (10.8) kan därmed skrivas

$$\begin{array}{lcl} (\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1m}\lambda_m)\boldsymbol{v}_1 & + & (\alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2m}\lambda_m)\boldsymbol{v}_2 \\ & & +\cdots \\ & & +(\alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{nm}\lambda_m)\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}. \end{array}$$

Eftersom $\boldsymbol{v}$:na är linjärt oberoende, så får vi ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}\lambda_1 & + & \alpha_{12}\lambda_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1m}\lambda_m & = & 0 \\ \alpha_{21}\lambda_1 & + & \alpha_{22}\lambda_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2m}\lambda_m & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & 0 \\ \alpha_{n1}\lambda_1 & + & \alpha_{n2}\lambda_2 & + & \cdots & + & \alpha_{nm}\lambda_m & = & 0 \end{array} \right.$$

i de obekanta λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Då systemet har fler obekanta m än ekvationer n har det oändligt många lösningar. Speciellt finns det en lösning där alla λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ inte är 0. Mängden N är således linjärt beroende. $\square$

För varje mängd i ett linjärt rum gäller 3 fall.

Sats 10.60. Antag att $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ är en bas för ett linjärt rum V.

1. Mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ spänner inte upp V om $m < n$.
2. Mängden $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ är linjärt beroende om $m > n$.
3. Om mängden $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ är en annan bas i V, så är $m = n$.

Bevis: 1. Låt $m < n$. Om mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ spänner upp V, så är $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ med fler basvektorer linjärt beroende enligt Sats 10.59. Men detta strider mot att $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ skulle vara bas. Alltså kan inte $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ spänna upp V.

2. Låt $m > n$. Basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ spänner upp V och då är varje mägnd $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ linjärt beroende.

3. Det följer av 1. att ingen bas kan ha färre antal basvektorer än n och av 2. ingen bas har fler antal basvektorer än n. Alltså om mängden $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ är en bas i V, så är $m = n$. $\square$