8. Determinanter

8.1. Determinanter av ordning 2 och 3

Vi har i Kapitel 4 om Vektorprodukt sett hur vi till en 2×2 matris $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ definierat en **determinant**. Denna determinant har vi betecknat

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

samt tillordnat ett värde via korsmultiplikation:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinantbegreppet dök också upp senare när vi beräknade volymprodukt av tre vektorer i rummet. Om $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ är givna i ON-bas i rummet, så har vi visat i Exempel 4.10 att volymprodukten

$$V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

kan också betraktas som determinanten, se formel (4.5):

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Determinanten blir enkel att räkna ut då vi tänker oss en utveckling efter första raden:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot x_1 \cdot (\text{den determinant som fås om rad 1 och kolonn 1 stryks}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot y_1 \cdot (\text{den determinant som fås om rad 1 och kolonn 2 stryks}) \\
&= (-1)^{1+3} \cdot z_1 \cdot (\text{den determinant som fås om rad 1 och kolonn 3 stryks}) \\
&= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\
&= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(x_2z_3 - x_3z_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2).
\end{aligned}$$

Nedan kommer vi att påvisa några egenskaper hos determinanten.

1. Om två rader är lika, t.ex. rad 1 och rad 2, så är $\det A = 0$, ty

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_2 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_2 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= x_2(y_2z_3 - y_3z_2) - y_2(x_2z_3 - x_3z_2) + z_2(x_2y_3 - x_3y_2) = 0. \end{aligned}$$

2. Determinanten är linjär i raderna:

$$\begin{vmatrix} \lambda x_1 + \mu x & \lambda y_1 + \mu y & \lambda z_1 + \mu z \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda x_1 + \mu x) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - (\lambda y_1 + \mu y) \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + (\lambda z_1 + \mu z) \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \lambda y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \lambda z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \mu x \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \mu y \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \mu z \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

3. En radoperation ändrar inte determinantens värde: om $\lambda = 1$, $x = x_2$, $y = y_2$ och $z = z_2$, så fås

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 + \mu x_2 & y_1 + \mu y_2 & z_1 + \mu z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= \det A + 0 = \det A, \quad \text{enligt 1. ovan.} \end{aligned}$$

4. Om en rad multipliceras med en konstant λ, så ges den nya determinanten av $\lambda \det A$, ty låt $\mu = 0$ i 2. ovan:

$$\begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \lambda \det A.$$

5. $\lambda = 0$ i 4. ovan visar att $\det A = 0$ så fort en rad är en nollrad.

6. Om två rader i en determinant byter plats ändrar determinanten tecken:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} &= x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_2 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= x_2(\underline{\underline{y_1z_3}} - y_3z_1) - y_2(\underline{x_1z_3} - x_3z_1) + z_2(\underline{x_1y_3} - \underline{\underline{x_3y_1}}) \\ &= -x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + y_1(x_2z_3 - x_3z_2) - z_1(x_2y_3 - x_3y_2) = -\det A. \end{aligned}$$

7. Om $A = E$, dvs enhetsmatrisen, så är $\det A = 1$, ty

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

8. $\det A^t = \det A$, ty

$$\begin{aligned} \det A^t &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(\underline{y_1z_3} - \underline{\underline{y_3z_1}}) + x_3(\underline{y_1z_2} - \underline{\underline{y_2z_3}}) \\ &= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(x_2z_3 - x_3z_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2) = \det A. \end{aligned}$$

9. Regel 6. visar att man kan utveckla efter vilken rad som helst genom att byta plats på raderna samt hålla i minnet att varje byte ändrar determinantens tecken. $\square$

Egenskaperna ovan gäller även för kolonner. Regel 8 visar att för att beräkna en determinant, kan man utveckla längs första kolonnen. Detta betyder att reglerna är fortfarande giltiga om vi byter rader mot kolonner.

Anmärkning 8.1. Av egenskaperna ovan kan vi dra följande slutsatser:

1. Determinanten är linjär i kolonnerna.
2. Kolonnoperationer ändrar inte determinantens värde.
3. Determinanten ändrar tecken om två kolonner byter plats med varandra.
4. Om en kolonn multipliceras med en konstant λ, så ges den nya determinanten av $\lambda \det A$.
5. determinanten är 0 om två kolonner är lika
6. determinaten är 0 om en kolonn är en nollkolonn.

I exemplen som följer belyser vi ovannämnda egenskaper hos determinanten. Vi börjar med en 2×2-determinant.

Exempel 8.2. Determinanten för $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ beräknar vi via

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = -8.$$

Verifera några av egenskaperna ovan för $\det A$.

Lösning: a) **Radoperationer:**

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = \{\text{rad 2-3} \times \text{rad 1}\} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

b) **Kolonnoperationer:**

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = \{\text{kolonn 2-2} \times \text{kolonn 1}\} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

c) **Bryt ut ett tal ur en rad:**

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8.$$

d) **Bryt ut ett tal ur en kolonn:**

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8.$$

□

Exempel 8.3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Lösning: a) **Utveckling efter rad 1:** Se Exempel 4.11, där har vi visat att $\det A = 0$.

b) **Utveckling efter rad 3:**

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

c) **Utveckling efter kolonn 1:**

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

d) **Utveckling efter kolonn 2:**

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Nu när vi har sett hur vi utvecklar efter en godtycklig rad eller kolonn ska vi se hur effektivt det är att kombinera det med rad- eller kolonnoperationer. Vi skaffar oss så många nollor som möjligt i en rad eller kolonn:

e) **Vi skaffar nollor i kolonn 1 genom radoperationer:**

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

efter en utveckling efter rad 3. Ny rad 2 $= -4 \times$ rad 1 + rad 2.

f) **Vi skaffar nollor i rad 1 genom kolonnoperationer:**

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & -6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

efter en utveckling efter kolonn 3. Ny kolonn 2 $= -2 \times$ kolonn 1 + kolonn 2.

Vi kan också bryta ut ett tal som finns på alla platser i en rad eller i en kolonn. T.ex, så kan vi bryta ut talet 3 ur kolonn 3:

g) **Vi bryter ut ett tal ur rad eller en kolonn:**

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 = 0,$$

där vi har brutit ut 3 från kolonn 3 samt skaffat nollor i kolonn 1. $\square$